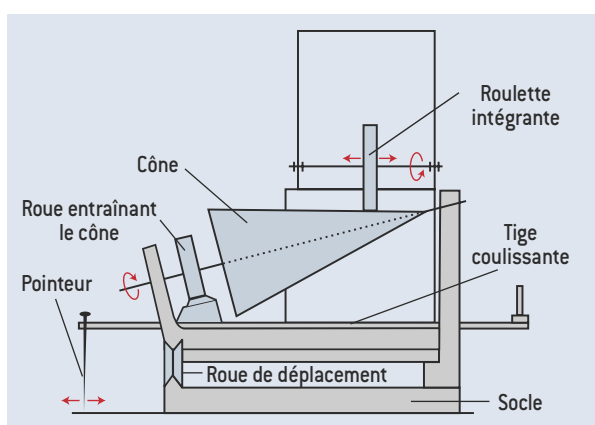
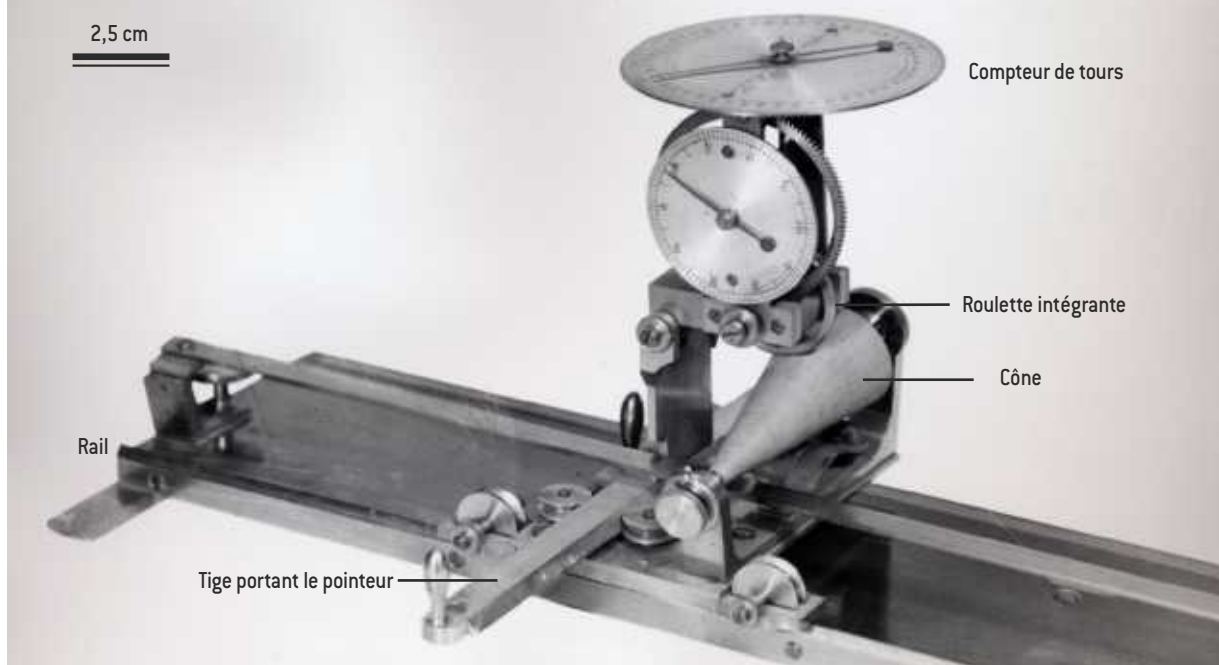
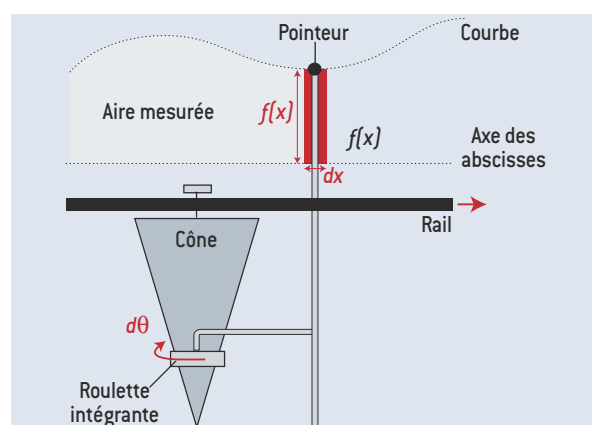




2. Le planimètre à cône d'Hermann (en haut, un exemplaire construit par l'atelier Ernst à Paris vers 1840, de 60 centimètres de longueur) permet de déterminer graphiquement l'aire comprise sous une courbe. L'opérateur déplace le dispositif le long d'un rail selon l'axe des abscisses tout en suivant la courbe avec un pointeur. Ce pointeur est relié par une tige à une roulette qui appuie sur un cône. Le cône, entraîné par le déplacement du dispositif, tourne autour de son axe à vitesse constante (à gauche, vue en coupe). La roulette, solidaire du pointeur, se décale le long du cône (flèches rouges) lorsque le pointeur monte ou descend



en suivant la courbe. Comme la vitesse de rotation à la surface du cône est plus rapide vers la base que vers le sommet, la vitesse de rotation de la roulette est ainsi d'autant plus grande que la hauteur $f(x)$ sous la courbe est grande (à droite, vue de dessus). La rotation instantanée de la roulette $d\theta$ est ainsi à tout instant proportionnelle à l'aire d'une bande infiniment mince sous la courbe $f(x) dx$. Son angle de rotation total θ au terme du déplacement du planimètre est ainsi proportionnel à l'aire A comprise sous la courbe entre l'abscisse de départ et celle d'arrivée ($\theta = \int d\theta = \int k f(x) dx = kA$), la constante k étant fixée par les dimensions de l'appareil.

ingénieurs du génie civil rencontrent quotidiennement ce problème en raison du développement rapide des voies de communication en Europe – routes, voies ferrées, canaux. La construction d'une voie de circulation nécessite en particulier de déblayer la terre dans les zones où le niveau du sol est trop élevé et de la transporter là où le niveau est trop bas. Il convient d'évaluer au mieux ces déblais et remblais afin de minimiser les transports de matériaux, onéreux en termes de main-d'œuvre. Avant le commencement des travaux, à partir des relevés topographiques du terrain, les ingénieurs découpent sur le plan qu'ils ont dressé le sol en tranches verticales perpendiculaires au tracé de la voie, et évaluent graphiquement les surfaces concernées, et, de là, les volumes à déplacer.

Ce procédé entraîne le calcul fastidieux d'un grand nombre de surfaces, de sorte que les ingénieurs du XIX^e siècle sont très motivés pour améliorer et mécaniser les anciennes méthodes de calcul des aires. C'est à cette époque qu'apparaissent progressivement les planimètres, des instruments

qui permettent de mesurer de manière exacte l'aire d'une surface délimitée par une courbe fermée dessinée sur un plan ou un relevé topographique. Comme pour la roue d'arpenteur, le principe repose sur l'intégration. Pour mesurer l'aire comprise sous une courbe, on la découpe en minces bandes parallèles, que l'on assimile à des rectangles. L'aire cherchée est alors approchée par la somme des aires de ces rectangles élémentaires. En prenant, en théorie, des bandes de largeur infiniment petite et en faisant une sommation infinie, on obtient l'aire exacte.

En 1814, l'ingénieur bavarois Johann Martin Hermann, employé au Bureau du cadastre et des impôts de Munich, trouve le moyen de traduire mécaniquement cette sommation en adaptant le principe de la roue d'arpenteur. L'idée est de rendre la vitesse de rotation de la roulette proportionnelle à l'ordonnée de la courbe à chaque instant, de sorte qu'un déplacement infinitésimal du dispositif entraîne une rotation de la roue proportionnelle à l'aire de la bande

infinitésimale située sous la courbe. Au terme du déplacement de l'appareil, l'angle de rotation total de la roue est ainsi égal à la somme des aires des bandes infinitésimales, c'est-à-dire à l'aire sous la courbe. Pour ce faire, Hermann introduit une pièce conique intermédiaire entre la feuille et la roulette, cône qui tourne à vitesse angulaire constante au contact du plan (voir la figure 2).

Les supérieurs d'Hermann ont accueilli d'un œil bienveillant l'idée de fabriquer un tel instrument, mais le projet n'a jamais abouti en raison des problèmes de santé de son concepteur. Après l'oubli de la trouvaille d'Hermann, le principe de la roulette intégrante tournant sur un cône a été redécouvert deux fois indépendamment, vers 1824 par le mathématicien italien Tito Gonella, professeur à Florence, puis en 1849, par l'ingénieur suisse Kaspar Wetli.

Au passage, Gonella et Wetli remarquent que l'angle au sommet du cône ne joue aucun rôle dans le processus de sommation continue, hormis celui d'une constante multiplicative, et que l'on peut en fixer arbitrairement la valeur. En prenant un angle limite de 180 degrés, Gonella et Wetli remplacent le cône par un disque, ce qui facilite notablement la réalisation de l'appareil (voir la figure 3). Le déplacement de la roulette d'une moitié du disque à l'autre, où le sens de rotation est inversé, permet en outre de comptabiliser les aires négativement, et ainsi de mesurer l'aire d'une figure fermée même si celle-ci coupe l'axe des abscisses.

Les planimètres à cône ou à disque sont des instruments onéreux et de fabrication complexe, aussi n'ont-ils rencontré qu'un succès relatif. Le nombre d'exemplaires produits depuis l'invention d'Hermann est estimé à environ 500 pièces. Vers le milieu du XIX^e siècle, quelques rares ateliers de mécanique de précision s'en partageaient le marché, parmi lesquels Oppikofer à Zurich, Ernst à Paris, Stark à Vienne et Ausfeld à Gotha, en Allemagne. Seuls quelques exemplaires de cette époque ont été conservés.

Les planimètres seraient sans doute restés des instruments coûteux, rares et méconnus sans la réflexion du mathématicien Jacob Amsler. Né en Suisse en 1823, ce fils de fermier étudie d'abord la théologie avant de s'orienter

vers les mathématiques et la physique, puis vers la fabrication d'instruments mathématiques de précision. L'année 1854 est particulièrement faste dans sa vie. Il convole en justes noces et invente le planimètre polaire, qui connaît aussitôt un succès foudroyant.

Amsler, en cherchant à simplifier le planimètre à disque, va réaliser une série de transformations progressives. Il s'aperçoit qu'il est équivalent de permettre à la roulette d'être inclinée tout en restant tangente au bord du disque, plutôt que parallèle à l'axe des abscisses. Dans cette configuration, seul compte que la distance de la roulette au centre soit fixe, ce qu'une simple tige assure, et le disque devient inutile. Enfin, le déplacement du disque le long de l'axe des abscisses (un cercle de rayon infini) est équivalent, d'un point de vue théorique, à déplacer l'extrémité de cette tige sur un cercle de rayon fini. Pour réaliser ce mouvement circulaire, mécaniquement beaucoup plus simple que le mouvement rectiligne, Amsler articule le bras portant la roulette à un premier bras qui tourne autour d'un point fixe, le pôle.

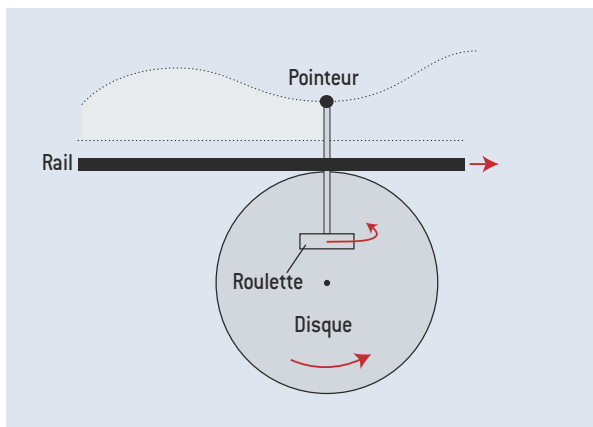
Une simplification progressive

Par ces modifications successives, Amsler réussit à s'affranchir du disque. La roulette intégrante, fixée perpendiculairement au second bras, tourne sur la feuille de papier. Ce bras se termine par un pointeur avec lequel on suit le bord de la surface que l'on veut mesurer (voir la figure 4). Pendant l'opération, seule la composante du mouvement perpendiculaire au second bras entraîne la roulette. L'angle de rotation total, lorsque le pointeur a parcouru tout le bord de la surface, donne l'aire cherchée.

Ce résultat s'explique en termes modernes par une application du théorème de Green, qui ramène le calcul d'une intégrale surfacique (sommation sur des éléments de surface infinitésimaux) au calcul d'une intégrale curviligne (sommation sur des arcs de courbe infinitésimaux). Cette justification – qui vaut aussi pour tous les planimètres reposant sur l'emploi d'une roulette intégrante – a été découverte *a posteriori* au début du XX^e siècle. Auparavant, les inventeurs expliquaient le fonctionnement de leurs instruments par des raisonnements longs et tortueux.

En supprimant la partie la plus complexe des planimètres antérieurs, Amsler aboutit à un instrument plus précis, léger, transportable sur le chantier (les instruments précédents étaient confinés aux bureaux d'études) et, surtout, dix fois moins cher que ses prédécesseurs. Très vite, les ingénieurs remarquent que le planimètre polaire, qui permet un calcul graphique rapide et pratique des déblais et des remblais, est aussi adapté à celui de nombreuses quantités cruciales en mécanique et s'exprimant par des intégrales. Le planimètre d'Amsler reçoit de fait immédiatement la faveur de nombreux ingénieurs, notamment ceux des chemins de fer et de la construction navale.

Dès 1854, Amsler crée un atelier en Suisse pour produire en série son nouvel instrument. Jusqu'à sa mort, en 1912, environ 50 000 planimètres y seront fabriqués. Au cours de la seconde moitié du XIX^e siècle, deux autres maisons se lancent à leur tour dans la fabrication à grande échelle de planimètres : Ott, à Kempten, dès 1873,



3. Remplacer le cône par un disque facilite la réalisation du planimètre. Le disque tourne à plat le long de l'axe des abscisses, tandis que la roulette, perpendiculaire à sa surface, est décalée le long du diamètre en fonction de la hauteur de la courbe. Selon que la roulette est au-dessus ou en dessous du centre, l'aire est comptabilisée positivement ou négativement.