

infinitésimale située sous la courbe. Au terme du déplacement de l'appareil, l'angle de rotation total de la roue est ainsi égal à la somme des aires des bandes infinitésimales, c'est-à-dire à l'aire sous la courbe. Pour ce faire, Hermann introduit une pièce conique intermédiaire entre la feuille et la roulette, cône qui tourne à vitesse angulaire constante au contact du plan (voir la figure 2).

Les supérieurs d'Hermann ont accueilli d'un œil bienveillant l'idée de fabriquer un tel instrument, mais le projet n'a jamais abouti en raison des problèmes de santé de son concepteur. Après l'oubli de la trouvaille d'Hermann, le principe de la roulette intégrante tournant sur un cône a été redécouvert deux fois indépendamment, vers 1824 par le mathématicien italien Tito Gonella, professeur à Florence, puis en 1849, par l'ingénieur suisse Kaspar Wetli.

Au passage, Gonella et Wetli remarquent que l'angle au sommet du cône ne joue aucun rôle dans le processus de sommation continue, hormis celui d'une constante multiplicative, et que l'on peut en fixer arbitrairement la valeur. En prenant un angle limite de 180 degrés, Gonella et Wetli remplacent le cône par un disque, ce qui facilite notablement la réalisation de l'appareil (voir la figure 3). Le déplacement de la roulette d'une moitié du disque à l'autre, où le sens de rotation est inversé, permet en outre de comptabiliser les aires négativement, et ainsi de mesurer l'aire d'une figure fermée même si celle-ci coupe l'axe des abscisses.

Les planimètres à cône ou à disque sont des instruments onéreux et de fabrication complexe, aussi n'ont-ils rencontré qu'un succès relatif. Le nombre d'exemplaires produits depuis l'invention d'Hermann est estimé à environ 500 pièces. Vers le milieu du XIX^e siècle, quelques rares ateliers de mécanique de précision s'en partageaient le marché, parmi lesquels Oppikofer à Zurich, Ernst à Paris, Stark à Vienne et Ausfeld à Gotha, en Allemagne. Seuls quelques exemplaires de cette époque ont été conservés.

Les planimètres seraient sans doute restés des instruments coûteux, rares et méconnus sans la réflexion du mathématicien Jacob Amsler. Né en Suisse en 1823, ce fils de fermier étudie d'abord la théologie avant de s'orienter

vers les mathématiques et la physique, puis vers la fabrication d'instruments mathématiques de précision. L'année 1854 est particulièrement faste dans sa vie. Il convoque en justes noces et invente le planimètre polaire, qui connaît aussitôt un succès foudroyant.

Amsler, en cherchant à simplifier le planimètre à disque, va réaliser une série de transformations progressives. Il s'aperçoit qu'il est équivalent de permettre à la roulette d'être inclinée tout en restant tangente au bord du disque, plutôt que parallèle à l'axe des abscisses. Dans cette configuration, seul compte que la distance de la roulette au centre soit fixe, ce qu'une simple tige assure, et le disque devient inutile. Enfin, le déplacement du disque le long de l'axe des abscisses (un cercle de rayon infini) est équivalent, d'un point de vue théorique, à déplacer l'extrémité de cette tige sur un cercle de rayon fini. Pour réaliser ce mouvement circulaire, mécaniquement beaucoup plus simple que le mouvement rectiligne, Amsler articule le bras portant la roulette à un premier bras qui tourne autour d'un point fixe, le pôle.

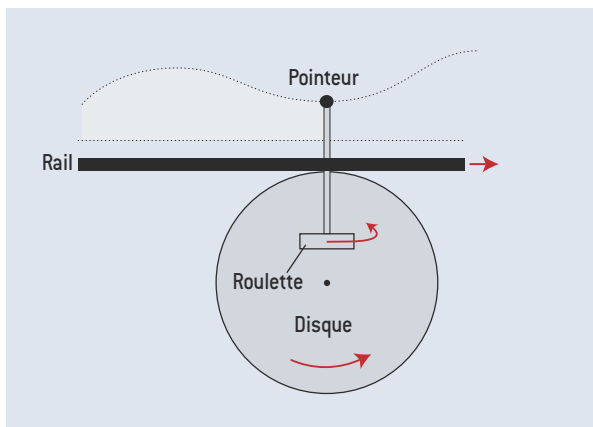
Une simplification progressive

Par ces modifications successives, Amsler réussit à s'affranchir du disque. La roulette intégrante, fixée perpendiculairement au second bras, tourne sur la feuille de papier. Ce bras se termine par un pointeur avec lequel on suit le bord de la surface que l'on veut mesurer (voir la figure 4). Pendant l'opération, seule la composante du mouvement perpendiculaire au second bras entraîne la roulette. L'angle de rotation total, lorsque le pointeur a parcouru tout le bord de la surface, donne l'aire cherchée.

Ce résultat s'explique en termes modernes par une application du théorème de Green, qui ramène le calcul d'une intégrale surfacique (sommation sur des éléments de surface infinitésimaux) au calcul d'une intégrale curviligne (sommation sur des arcs de courbe infinitésimaux). Cette justification – qui vaut aussi pour tous les planimètres reposant sur l'emploi d'une roulette intégrante – a été découverte *a posteriori* au début du XX^e siècle. Auparavant, les inventeurs expliquaient le fonctionnement de leurs instruments par des raisonnements longs et tortueux.

En supprimant la partie la plus complexe des planimètres antérieurs, Amsler aboutit à un instrument plus précis, léger, transportable sur le chantier (les instruments précédents étaient confinés aux bureaux d'études) et, surtout, dix fois moins cher que ses prédécesseurs. Très vite, les ingénieurs remarquent que le planimètre polaire, qui permet un calcul graphique rapide et pratique des déblais et des remblais, est aussi adapté à celui de nombreuses quantités cruciales en mécanique et s'exprimant par des intégrales. Le planimètre d'Amsler reçoit de fait immédiatement la faveur de nombreux ingénieurs, notamment ceux des chemins de fer et de la construction navale.

Dès 1854, Amsler crée un atelier en Suisse pour produire en série son nouvel instrument. Jusqu'à sa mort, en 1912, environ 50 000 planimètres y seront fabriqués. Au cours de la seconde moitié du XIX^e siècle, deux autres maisons se lancent à leur tour dans la fabrication à grande échelle de planimètres : Ott, à Kempten, dès 1873,



3. Remplacer le cône par un disque facilite la réalisation du planimètre. Le disque tourne à plat le long de l'axe des abscisses, tandis que la roulette, perpendiculaire à sa surface, est décalée le long du diamètre en fonction de la hauteur de la courbe. Selon que la roulette est au-dessus ou en dessous du centre, l'aire est comptabilisée positivement ou négativement.



4. Le planimètre polaire d'Amsler (ci-dessus, un exemplaire construit vers 1860) se compose d'un bras qui tourne autour d'un pôle fixe, articulé avec un second bras qui se termine par un pointeur et où une roulette intégrante est fixée perpendiculairement. Débarassé du cône ou du disque, il est plus précis, plus léger et moins coûteux que ses prédécesseurs. Près d'un million de planimètres polaires seront construits.

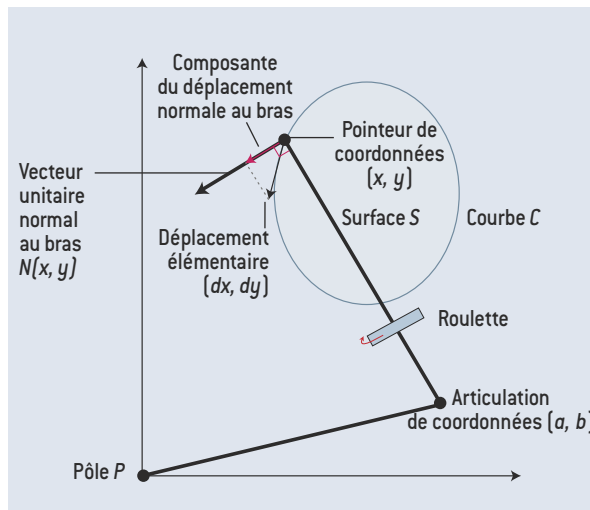
Son fonctionnement, à l'époque expliqué par des arguments empiriques, se justifie aujourd'hui de façon abstraite par le théorème de Green, qui relie l'intégrale sur une courbe fermée C à l'intégrale sur la surface S enclose par cette courbe. En supposant les deux bras de longueur égale à l'unité, notons (x, y) les coordonnées du pointeur, qui suit la courbe, et (a, b) celles de l'articulation (ci-contre). La roulette étant perpendiculaire au second bras, seule compte la composante du déplacement perpendiculaire à ce bras, égale à la projection du vecteur de déplacement infinitésimal du pointeur $[dx, dy]$ sur le vecteur unitaire normal au bras $N(x, y)$. Un calcul rapide donne $N(x, y) = (b - y, x - a)$. La projection s'exprime alors par le produit scalaire :

$$N(x, y) \cdot [dx, dy] = (b - y) dx + (x - a) dy$$

La formule de Green permet alors d'écrire l'égalité :

$$\oint_C (b - y) dx + (x - a) dy = \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} (x - a) - \frac{\partial}{\partial y} (b - y) \right] dx dy$$

Cette dernière intégrale, égale à $\iint_S dx dy$, exprime l'aire de la surface S .



et Coradi, à Zurich, à partir de 1880. Le nombre total de planimètres polaires fabriqués depuis 1854 se situe entre 500 000 et 1 000 000, ce qui souligne l'importance technique et économique de cet instrument.

Son déclin n'a commencé qu'avec le développement des ordinateurs. Les ateliers de mécanique de précision d'Allemagne et de Suisse, qui avaient détenu pendant plus d'un siècle un quasi-monopole de la fabrication des intégrateurs mécaniques, se sont effondrés. Aujourd'hui, la production est principalement assurée par quatre fabricants japonais qui réalisent encore quelques planimètres à destination de l'industrie textile ou de l'imagerie médicale, où l'on peut se contenter d'évaluer rapidement la surface approximative d'une pièce de tissu ou d'une tumeur sur une radiographie.

Prédire les horaires de marées

Parallèlement à l'essor des planimètres, se sont développés leurs proches cousins, les intégraphes. Alors qu'un planimètre fournit une valeur numérique, l'aire sous une courbe entre deux bornes, ou, de façon équivalente, l'intégrale d'une fonction f entre deux abscisses a et b , un intégraphe sert à déterminer graphiquement une primitive F d'une fonction f donnée, c'est-à-dire la fonction dont la valeur $F(x)$ en chaque point x est égale à l'intégrale de la fonction f entre deux bornes a et x (en d'autres termes, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$).

Un intégraphe peut jouer le rôle d'un planimètre, car il donne simultanément les aires sous une courbe pour toutes les bornes, mais en déterminant les valeurs de l'intégrale pour chaque point, il ouvre surtout la voie à des intégrations successives.

De nombreux problèmes de génie civil se traduisent en effet par des intégrations répétées. Lorsqu'on étudie la résistance d'une poutre soumise à des charges, par exemple, intégrer la courbe de répartition des charges donne le fléchissement en chaque point, dont l'intégration donne à son tour le cisaillement. Un intégraphe permet de déduire sur le plan ces courbes l'une de l'autre de façon exacte, d'un mouvement simple et continu.

Bruno Abdank-Abakanowicz réussit dans les années 1880 à mettre au point un tel intégraphe. Né en Pologne en 1852, ce mathématicien fait ses études aux Écoles polytechniques de Lvov, actuellement en Ukraine, et de Vienne, où il est élève du mathématicien Wawrzyniec Zmurko, qui s'est lui aussi intéressé à l'intégration mécanique. Il s'exile à Paris à la suite de la partition de son pays entre la Russie, la Prusse et l'Autriche.

Le problème du calcul d'une primitive, inverse de celui de la dérivation, consiste à retrouver une courbe à partir de la seule connaissance de ses tangentes. Après plusieurs tentatives, Abdank-Abakanowicz abandonne le principe de la roulette intégrante, et réussit à traduire mécaniquement le calcul des primitives en réalisant un dispositif qui