



4. Le planimètre polaire d'Amsler (ci-dessus, un exemplaire construit vers 1860) se compose d'un bras qui tourne autour d'un pôle fixe, articulé avec un second bras qui se termine par un pointeur et où une roulette intégrante est fixée perpendiculairement. Débarassé du cône ou du disque, il est plus précis, plus léger et moins coûteux que ses prédécesseurs. Près d'un million de planimètres polaires seront construits.

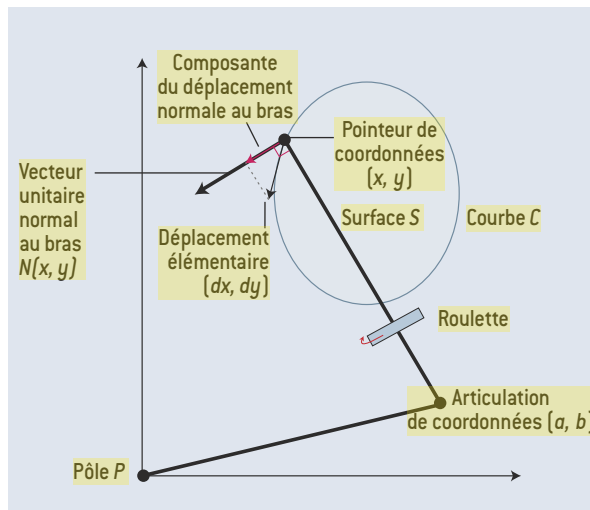
Son fonctionnement, à l'époque expliqué par des arguments empiriques, se justifie aujourd'hui de façon abstraite par le théorème de Green, qui relie l'intégrale sur une courbe fermée C à l'intégrale sur la surface S enclose par cette courbe. En supposant les deux bras de longueur égale à l'unité, notons (x, y) les coordonnées du pointeur, qui suit la courbe, et (a, b) celles de l'articulation (ci-contre). La roulette étant perpendiculaire au second bras, seule compte la composante du déplacement perpendiculaire à ce bras, égale à la projection du vecteur de déplacement infinitésimal du pointeur $[dx, dy]$ sur le vecteur unitaire normal au bras $N(x, y)$. Un calcul rapide donne $N(x, y) = (b - y, x - a)$. La projection s'exprime alors par le produit scalaire :

$$N(x, y) \cdot [dx, dy] = (b - y) dx + (x - a) dy$$

La formule de Green permet alors d'écrire l'égalité :

$$\int_C (b - y) dx + (x - a) dy = \iint_S \left[\frac{\partial (x - a)}{\partial x} - \frac{\partial (b - y)}{\partial y} \right] dx dy$$

Cette dernière intégrale, égale à $\iint_S dx dy$, exprime l'aire de la surface S .



et Coradi, à Zurich, à partir de 1880. Le nombre total de planimètres polaires fabriqués depuis 1854 se situe entre 500 000 et 1 000 000, ce qui souligne l'importance technique et économique de cet instrument.

Son déclin n'a commencé qu'avec le développement des ordinateurs. Les ateliers de mécanique de précision d'Allemagne et de Suisse, qui avaient détenu pendant plus d'un siècle un quasi-monopole de la fabrication des intégrateurs mécaniques, se sont effondrés. Aujourd'hui, la production est principalement assurée par quatre fabricants japonais qui réalisent encore quelques planimètres à destination de l'industrie textile ou de l'imagerie médicale, où l'on peut se contenter d'évaluer rapidement la surface approximative d'une pièce de tissu ou d'une tumeur sur une radiographie.

Prédire les horaires de marées

Parallèlement à l'essor des planimètres, se sont développés leurs proches cousins, les intégraphes. Alors qu'un planimètre fournit une valeur numérique, l'aire sous une courbe entre deux bornes, ou, de façon équivalente, l'intégrale d'une fonction f entre deux abscisses a et b , un intégraphe sert à déterminer graphiquement une primitive F d'une fonction f donnée, c'est-à-dire la fonction dont la valeur $F(x)$ en chaque point x est égale à l'intégrale de la fonction f entre deux bornes a et x (en d'autres termes, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$).

Un intégraphe peut jouer le rôle d'un planimètre, car il donne simultanément les aires sous une courbe pour toutes les bornes, mais en déterminant les valeurs de l'intégrale pour chaque point, il ouvre surtout la voie à des intégrations successives.

De nombreux problèmes de génie civil se traduisent en effet par des intégrations répétées. Lorsqu'on étudie la résistance d'une poutre soumise à des charges, par exemple, intégrer la courbe de répartition des charges donne le fléchissement en chaque point, dont l'intégration donne à son tour le cisaillement. Un intégraphe permet de déduire sur le plan ces courbes l'une de l'autre de façon exacte, d'un mouvement simple et continu.

Bruno Abdank-Abakanowicz réussit dans les années 1880 à mettre au point un tel intégraphe. Né en Pologne en 1852, ce mathématicien fait ses études aux Écoles polytechniques de Lvov, actuellement en Ukraine, et de Vienne, où il est élève du mathématicien Wawrzyniec Zmurko, qui s'est lui aussi intéressé à l'intégration mécanique. Il s'exile à Paris à la suite de la partition de son pays entre la Russie, la Prusse et l'Autriche.

Le problème du calcul d'une primitive, inverse de celui de la dérivation, consiste à retrouver une courbe à partir de la seule connaissance de ses tangentes. Après plusieurs tentatives, Abdank-Abakanowicz abandonne le principe de la roulette intégrante, et réussit à traduire mécaniquement le calcul des primitives en réalisant un dispositif qui