



4. Le planimètre polaire d'Amsler (ci-dessus, un exemplaire construit vers 1860) se compose d'un bras qui tourne autour d'un pôle fixe, articulé avec un second bras qui se termine par un pointeur et où une roulette intégrante est fixée perpendiculairement. Débarassé du cône ou du disque, il est plus précis, plus léger et moins coûteux que ses prédécesseurs. Près d'un million de planimètres polaires seront construits.

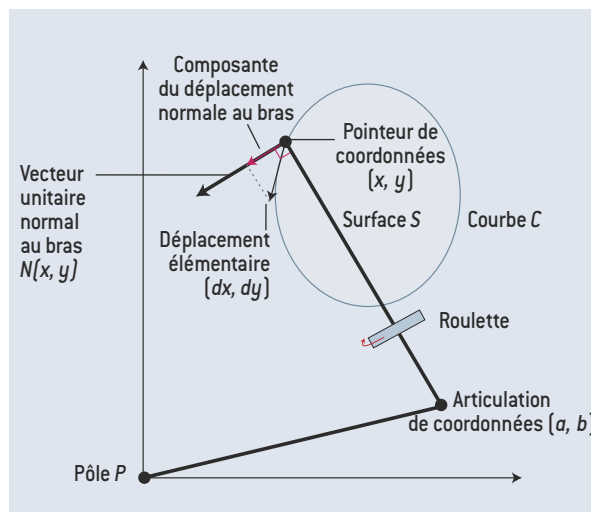
Son fonctionnement, à l'époque expliqué par des arguments empiriques, se justifie aujourd'hui de façon abstraite par le théorème de Green, qui relie l'intégrale sur une courbe fermée C à l'intégrale sur la surface S enclose par cette courbe. En supposant les deux bras de longueur égale à l'unité, notons (x, y) les coordonnées du pointeur, qui suit la courbe, et (a, b) celles de l'articulation (ci-contre). La roulette étant perpendiculaire au second bras, seule compte la composante du déplacement perpendiculaire à ce bras, égale à la projection du vecteur de déplacement infinitésimal du pointeur $[dx, dy]$ sur le vecteur unitaire normal au bras $N(x, y)$. Un calcul rapide donne $N(x, y) = (b - y, x - a)$. La projection s'exprime alors par le produit scalaire :

$$N(x, y) \cdot [dx, dy] = (b - y) dx + (x - a) dy$$

La formule de Green permet alors d'écrire l'égalité :

$$\int_C (b - y) dx + (x - a) dy = \iint_S \left[\frac{\partial (x - a)}{\partial x} - \frac{\partial (b - y)}{\partial y} \right] dx dy$$

Cette dernière intégrale, égale à $\iint_S dx dy$, exprime l'aire de la surface S .



et Coradi, à Zurich, à partir de 1880. Le nombre total de planimètres polaires fabriqués depuis 1854 se situe entre 500 000 et 1 000 000, ce qui souligne l'importance technique et économique de cet instrument.

Son déclin n'a commencé qu'avec le développement des ordinateurs. Les ateliers de mécanique de précision d'Allemagne et de Suisse, qui avaient détenu pendant plus d'un siècle un quasi-monopole de la fabrication des intégrateurs mécaniques, se sont effondrés. Aujourd'hui, la production est principalement assurée par quatre fabricants japonais qui réalisent encore quelques planimètres à destination de l'industrie textile ou de l'imagerie médicale, où l'on peut se contenter d'évaluer rapidement la surface approximative d'une pièce de tissu ou d'une tumeur sur une radiographie.

Prédire les horaires de marées

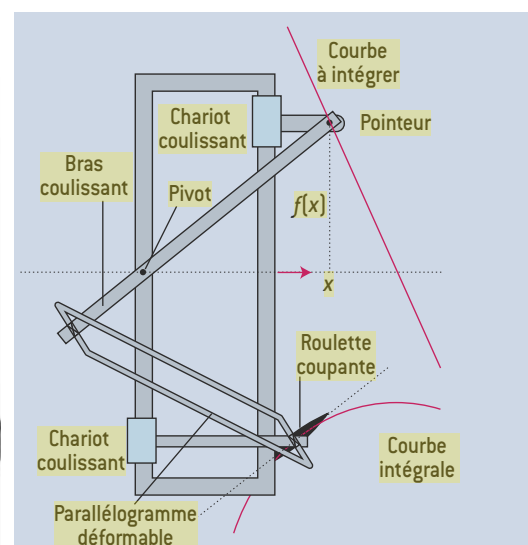
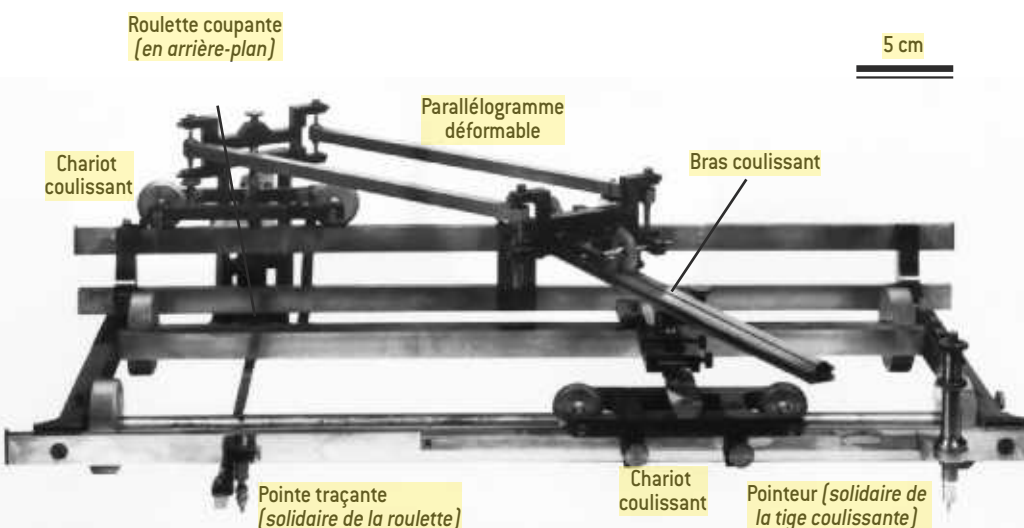
Parallèlement à l'essor des planimètres, se sont développés leurs proches cousins, les intégraphes. Alors qu'un planimètre fournit une valeur numérique, l'aire sous une courbe entre deux bornes, ou, de façon équivalente, l'intégrale d'une fonction f entre deux abscisses a et b , un intégrape sert à déterminer graphiquement une primitive F d'une fonction f donnée, c'est-à-dire la fonction dont la valeur $F(x)$ en chaque point x est égale à l'intégrale de la fonction f entre deux bornes a et x (en d'autres termes, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$).

Un intégrape peut jouer le rôle d'un planimètre, car il donne simultanément les aires sous une courbe pour toutes les bornes, mais en déterminant les valeurs de l'intégrale pour chaque point, il ouvre surtout la voie à des intégrations successives.

De nombreux problèmes de génie civil se traduisent en effet par des intégrations répétées. Lorsqu'on étudie la résistance d'une poutre soumise à des charges, par exemple, intégrer la courbe de répartition des charges donne le fléchissement en chaque point, dont l'intégration donne à son tour le cisaillement. Un intégrape permet de déduire sur le plan ces courbes l'une de l'autre de façon exacte, d'un mouvement simple et continu.

Bruno Abdank-Abakanowicz réussit dans les années 1880 à mettre au point un tel intégrape. Né en Pologne en 1852, ce mathématicien fait ses études aux Écoles polytechniques de Lvov, actuellement en Ukraine, et de Vienne, où il est élève du mathématicien Wawrzyniec Zmurko, qui s'est lui aussi intéressé à l'intégration mécanique. Il s'exile à Paris à la suite de la partition de son pays entre la Russie, la Prusse et l'Autriche.

Le problème du calcul d'une primitive, inverse de celui de la dérivation, consiste à retrouver une courbe à partir de la seule connaissance de ses tangentes. Après plusieurs tentatives, Abdank-Abakanowicz abandonne le principe de la roulette intégrante, et réussit à traduire mécaniquement le calcul des primitives en réalisant un dispositif qui



5. L'intégraphe d'Abdank-Abakanowicz [à gauche un exemple issu de la Maison Coradi vers 1900] permet de tracer la primitive d'une fonction f représentée par une courbe (dans le schéma de droite, certains éléments ont été déplacés par rapport à l'objet réel par commodité). On déplace le cadre le long de l'axe des abscisses tout en suivant la courbe à intégrer avec le pointeur, dont le mouvement est libre selon les ordonnées. Par construction, le bras portant le pointeur coulisse de façon telle que sa pente est constamment égale

à l'ordonnée $f(x)$ de la fonction à intégrer. Il est assujéti à un parallélogramme déformable, dont le côté opposé porte une roulette de sorte que celle-ci et le bras restent parallèles. La roulette, taillée en biseau pour mordre sur le papier et éviter tout dérapage, dessine une courbe dont la pente en chaque point est égale à l'ordonnée de la fonction initiale f , c'est-à-dire une courbe représentant l'une de ses primitives [F est une primitive de f si la dérivée de F est égale à f]. La primitive est ensuite matérialisée par un dispositif d'engrè.

transforme de façon continue les ordonnées de la courbe initiale en pentes de tangentes à la courbe recherchée.

La pièce essentielle est un parallélogramme déformable. Sur l'un des côtés est fixée une tige reliée au pointeur avec lequel l'opérateur suit la courbe à intégrer et le côté opposé porte une roulette coupante, destinée à tracer la primitive recherchée (voir la figure 5). La roulette reste toujours parallèle au bras du pointeur lorsque le parallélogramme se déforme. Par construction, lorsque le pointeur monte ou descend en suivant la courbe, la pente de la tige et, par conséquent, la direction de la roulette, sont constamment égales à l'ordonnée de la courbe initiale. Les tangentes en tout point à la courbe tracée par la roulette sont ainsi égales aux valeurs de la fonction de départ ; il s'agit donc de la primitive recherchée.

Les intégraphes, assez coûteux et destinés à des applications spécialisées, n'ont jamais été produits en grande série. Dans le catalogue 1900 de la Maison Coradi de Zurich, un intégraphe coûtait 350 francs, soit six fois plus qu'un planimètre polaire. Seuls des laboratoires ou des bureaux de calcul importants pouvaient s'offrir un tel instrument.

L'histoire des intégrateurs mécaniques ne se limite pas aux appareils décrits précédemment. Sans parler des instruments spécifiquement fabriqués pour répondre à un besoin particulier, des appareils plus complexes ont été conçus en associant plusieurs planimètres ou intégraphes. Vers la fin du XIX^e siècle, en connectant plusieurs planimètres, William Thomson, alias Lord Kelvin, invente un « analyseur harmonique ». Cet instrument calcule simultanément les premières harmoniques d'une fonction périodique, c'est-à-dire les termes prépondérants dans la décomposition de la fonction en une série de fonctions périodiques élémentaires. Grâce à cet appareil, Kelvin analyse graphiquement les mouvements des marées à partir des mesures effectuées dans les ports. En recombinaison ensuite, grâce à un autre dispositif mécanique, les harmoniques trouvées, il détermine une fonction modélisant la marée et permettant d'en prédire les horaires.

De même, en généralisant le principe de l'intégraphe, on peut passer d'un calcul graphique de primitive à l'intégration d'équations différentielles plus complexes. En connectant mécaniquement plusieurs intégraphes entre eux, on parvient par exemple à intégrer des équations différentielles du second ordre ou d'ordre plus élevé, qui, par nature, nécessitent plusieurs intégrations simultanées. L'idée fut lancée pour la première fois par William Thomson en 1876 ; faute de moyens techniques nécessaires, il ne put la concrétiser. Il a fallu attendre 1901 pour qu'Aleksei Krylov, de l'École navale de Saint-Petersbourg, construise le premier « analyseur différentiel » fondé sur ce principe. Cet instrument n'a cependant pas été conservé et, de ce fait, est mal connu. C'est surtout à partir des années 1930 que de grands analyseurs différentiels ont été fabriqués, par exemple par Vannevar Bush, à l'Institut de technologie du Massachusetts, ou par Douglas Hartree, à l'Université de Manchester, pour résoudre les problèmes apparus avec le développement des réseaux d'électricité et de téléphone. Pendant la Seconde Guerre mondiale, les principaux pays belligérants ont utilisé de tels appareils pour établir des tables d'artillerie.

De tous les instruments d'intégration, seul le planimètre polaire a été véritablement répandu : c'était un outil dont les ingénieurs se servaient chaque jour, au même titre que la règle à calcul. Après la guerre, cependant, tous les intégrateurs mécaniques ont connu un déclin rapide et ont été éclipsés par les ordinateurs et les calculatrices électroniques.

Dominique TOURNÈS est maître de conférences à l'Institut universitaire de formation des maîtres (IUFM) de la Réunion et chercheur au Laboratoire de recherches épistémologiques et historiques sur les sciences exactes et les institutions scientifiques (UMR 7596 CNRS/Université Paris 7).

J. MARGUIN, *Histoire des instruments et machines à calculer*, Hermann, Paris, 1994.