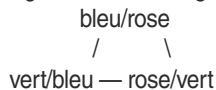


Le flexagone « flexé », vous avez entre les mains un nouvel hexagone dont les deux faces visibles ont changé de couleur. Vous pouvez à nouveau le flexer, ce qui vous conduit à une troisième configuration du flexagone. Une dernière manipulation vous ramène à l'état initial. Une telle promenade dans l'espace des configurations du flexagone se représente par un petit graphe :



Ce premier flexagone possède trois faces (trois couleurs qui apparaissent successivement par flexage) correspondant à trois configurations. D'où son nom de trihexaflexagone : trois faces hexagonales, chacune composée de 6 triangles.

Les études d'un futur prix Nobel

Stone forma autour de lui un groupe de travail sur les flexagones qui réunissait Bruant Tukerman, John Tukey, tous deux mathématiciens, et Richard Feynman alors étudiant en physique et qui en 1965 se verra décerner le prix Nobel... pour des travaux en électrodynamique quantique.

Malgré de nombreuses découvertes concernant les pliages flexibles, assez étrangement, aucune publication ne résulta des travaux du groupe réuni autour de Stone (peut-être parce que la Seconde Guerre mondiale les dispersa trop rapidement). C'est l'intérêt suscité par l'article de Martin Gardner qui relança la recherche sur cet étrange domaine des mathématiques récréatives. En partant d'un nombre un peu plus grand de triangles, on obtient d'autres flexagones de forme hexagonale possédant un nombre de faces supérieur à trois. La figure 3 indique comment construire le tétrahexaflexagone, le pentahexaflexagone et le hexahexaflexagone possédant respectivement 4, 5 et 6 faces.

Quelques remarques concernant l'hexahexaflexagone illustreront l'étrange richesse combinatoire de ces assemblages de triangles pliés.

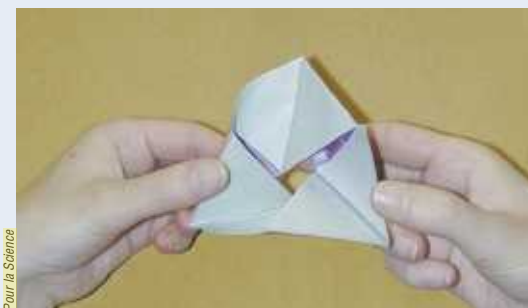
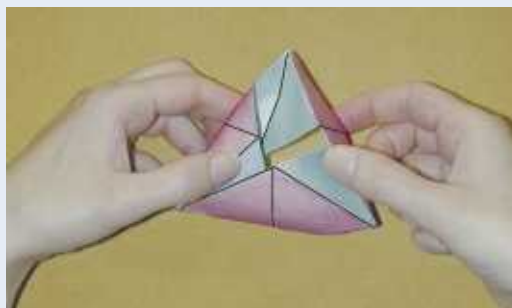
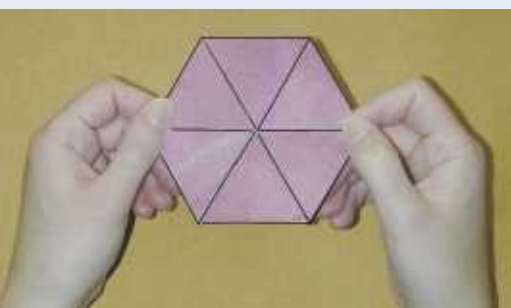
L'hexahexaflexagone possède 6 faces, ce qui signifie qu'en le manipulant vous ferez apparaître les six couleurs différentes utilisées dans le coloriage de la bande initiale. Jamais aucun mélange de couleur ne se produit. Chaque configuration est caractérisée par deux couleurs : celle visible au-dessus et celle visible en dessous. L'opération de « flexage » fait passer d'une configuration à une autre, ce qui définit un graphe (voir la figure 3). Son examen montre que :

- Il y a 9 configurations différentes, qu'on parcourt en flexant de toutes les façons possibles. Jamais aucune autre manipulation n'est possible (sans déchirer l'assemblage) et on garde donc toujours en main un hexagone bicolore ;
- Sur les 9 configurations, 3 configurations, dites « centrales », donnent accès chacune à quatre autres (dont à chaque fois les deux autres configurations centrales) ;
- Les 6 autres configurations, dites « périphériques », donnent chacune accès à une configuration périphérique et une configuration centrale.

On distingue sans mal (et sans regarder le diagramme) une configuration périphérique d'une configuration centrale en observant combien de triangles sont empilés pour chaque élément de l'hexagone. Dans le cas des configurations centrales, la répartition des épaisseurs est 2-4-2-4-2-4 ; pour les configurations périphériques, elle est 1-5-1-5-1-5.

Si vous réalisez des dessins sur les triangles, vous remarquerez que d'une configuration à l'autre les éléments d'une face donnée tournent ; autrement dit, les six triangles qui composent la face – violette par exemple – ne se disposent pas de la même façon selon la configuration que vous observez et qui exhibe une face violette. Parmi toutes les faces possibles (en tenant compte à la fois de la couleur et de la position relative des triangles), seules 15 faces différentes sont accessibles avec un hexahexaflexagone.

Nous vous laissons le soin de découvrir le graphe des configurations des tétra- et penta- hexaflexagones. Continuez votre exploration en construisant d'autres flexagones. Les plus



2. Je flexe, tu flexes, il ou elle flexe... L'opération de flexage permet de passer d'une configuration d'un flexagone à une autre. Pour l'effectuer, il n'est pas nécessaire de forcer quoi que ce soit : il suffit de plier le flexagone en faisant un zigzag de son pourtour, ce

qui ouvre alors le centre, lequel se déploie et constitue alors le pourtour de la nouvelle configuration. Un certain soin est indispensable dans la réalisation du flexagone et *surtout* dans son maniement. Ici le passage d'une face à l'autre d'un tétrahexaflexagone.

simples partent, comme pour les hexahexaflexagones, d'une simple bande de papier composée de triangles équilatéraux côte à côte : il y en a de ce type à 9 faces, 12 faces, 18 faces etc., avec, à chaque fois, des graphes de configurations de plus en plus complexes et intéressants à identifier.

Pour un nombre donné de faces, plusieurs hexaflexagones différents sont possibles. Leur dénombrement est indiqué dans la suite A000207 de l'encyclopédie des suites de Sloane (<http://www.research.att.com/~njas/sequences/>). Cette suite est aussi celle que l'on obtient en comptant le nombre de façons différentes de découper un polygone régulier à $N + 2$ côtés en N triangles par des diagonales ne se coupant pas.

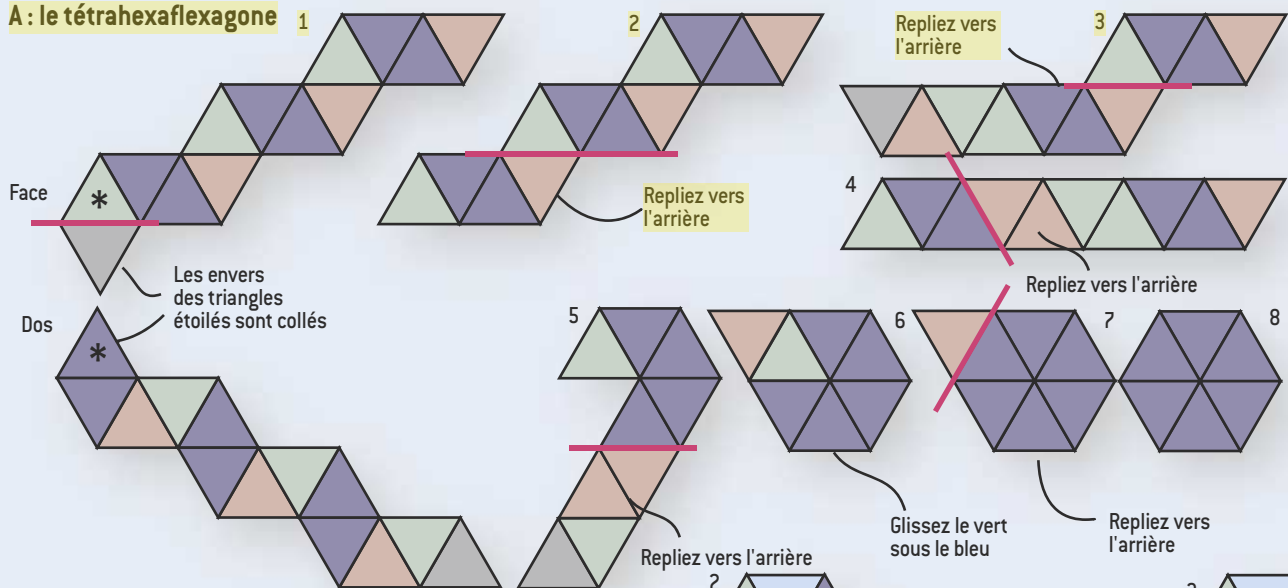
En collant des dessins sur les faces, vous créerez des casse-tête. Ils peuvent être du type « faites apparaître tel

dessin », leur difficulté étant liée à la structure du graphe des configurations.

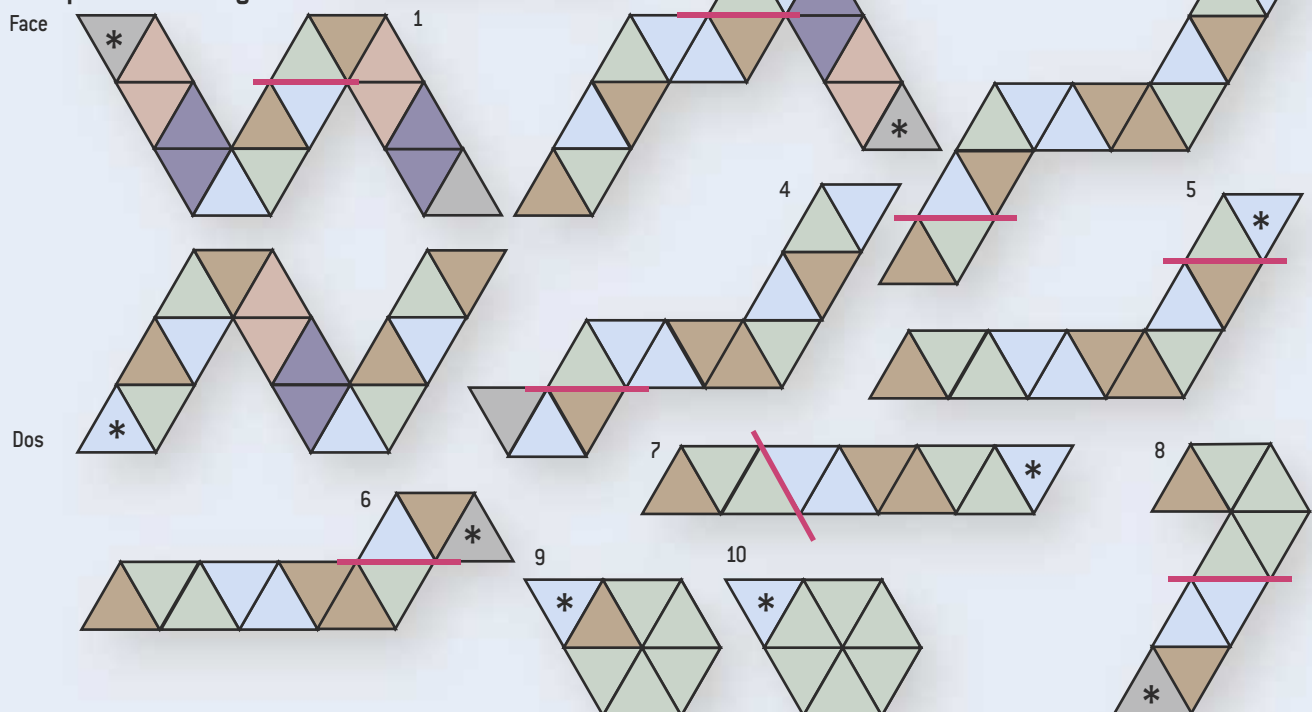
Un flexagone étant choisi, un autre casse-tête consiste à trouver la suite de manipulations la plus simple faisant passer par toutes les faces du flexagone, ou – plus long – par toutes les configurations possibles du flexagone. Vous pouvez aussi vous fabriquer un petit album photos original en collant des photos sur les faces d'un flexagone dont vous tournerez les pages en flexant le pliage.

Vous obtiendrez de beaux flexagones en découpant des cartons triangulaires (ou des plaques de bois) que vous relierez par des bandes de papier ou mieux des bandes de tissu. Si le bricolage ne vous amuse pas, vous pouvez acheter quelques flexagones chez un artisan britannique qui propose

A : le tétrahexaflexagone 1



B : le pentahexaflexagone



3. Trois flexagones : le tétrahexaflexagone (A), le pentahexaflexagone (B) et l'hexahexaflexagone (C). Fabriquez-les et explorez l'es-

pace de leurs configurations. Le haut de la figure C donne le détail de l'espace des configurations dans le cas de l'hexahexaflexagone. En flexant un