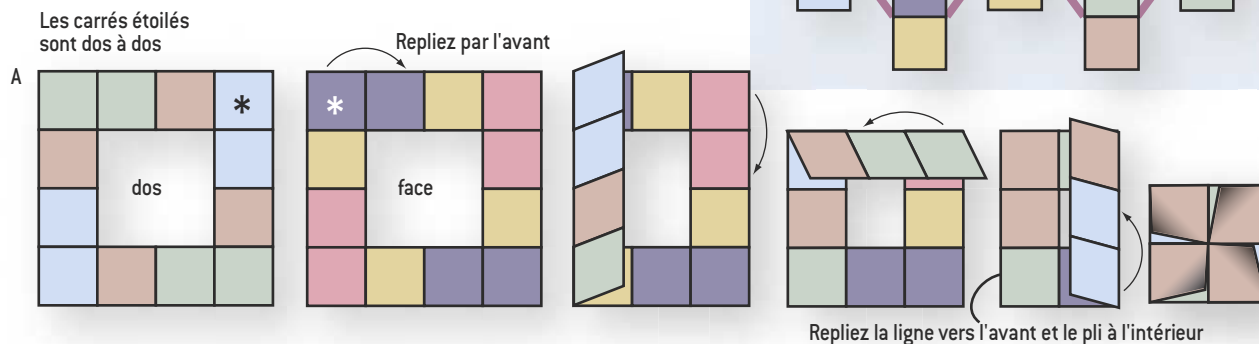
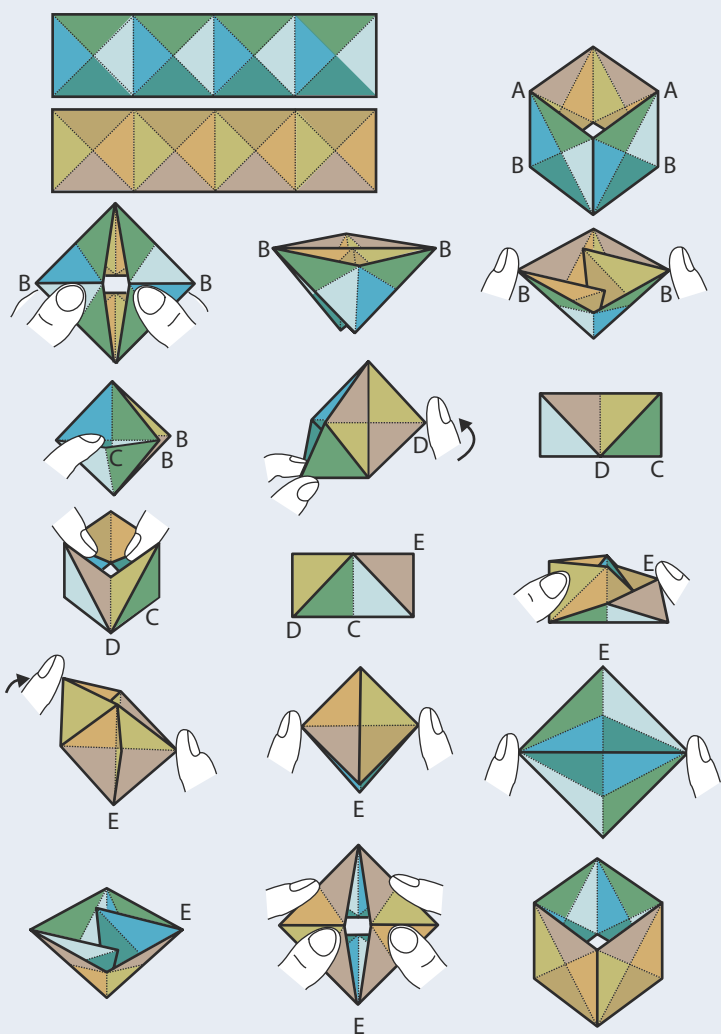




4. Vous pouvez aussi faire des flexagones sans colle !

En voici un premier exemple : (A) le pliage symétrique de la feuille trouée. La dernière des quatre opérations de pliage nécessite une très délicate manipulation pour que la face en bas à gauche, qui se place natu-

rellement sur le dessous (lorsqu'on replie les quatre derniers carrés), se retrouve au-dessus. Le résultat final est une forme rigide (elle ne se déplie pas d'elle-même) qui reste identique quand vous faites tourner le pliage d'un quart de tour (elle est invariante par rotation de 90 degrés).



5. Le flexatube. Bien que découvert en 1939 par Arthur Stone l'inventeur des flexagones, le flexatube n'est pas très connu. C'est pourtant un magnifique casse-tête facile à fabriquer soi-même. On marque des plis comme le dessin l'indique dans une bande rectangulaire 4×1 . On referme la bande, ce qui donne un anneau. Le problème est de retourner l'anneau (l'intérieur doit devenir l'extérieur et réciproquement) en utilisant uniquement les plis marqués, c'est-à-dire en faisant comme si chaque triangle rectangle dessiné était en carton rigide. L'étonnant est que c'est possible comme le montre la suite de dessins. Avec un tube plus long (quelle que soit sa longueur), le retournement reste possible, mais bien sûr nécessite une mosaïque plus fine de triangles.

questions simples et leurs solutions échappent à toute une communauté de passionnés. Robert Neale s'est demandé si on ne pouvait pas créer des flexagones sans collages. Il a trouvé plusieurs objets répondant à cette condition.

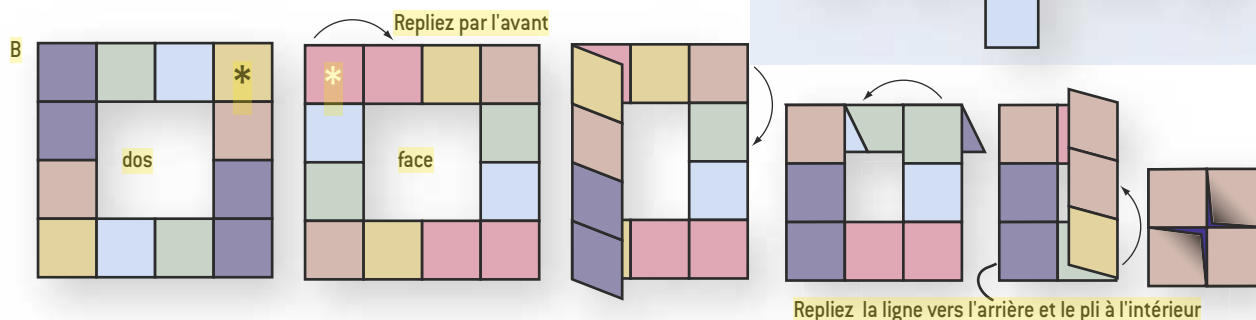
Partant d'une feuille de papier carrée (ou rectangulaire) à la surface de laquelle on a fait apparaître un quadrillage régulier de 16 carrés (ou rectangles), on découpe les 4 carrés (ou rectangles) centraux. Avec cette feuille trouée en main, deux pliages astucieux produisent deux flexagones très commodes pour faire de micro-albums photos (il faut coller les photos *après* avoir plié le support à cause de la manipulation spéciale décrite plus bas).

Le premier pliage que nous dénommerons « pliage symétrique » consiste à replier les quatre carrés situés à gauche – vers l'avant –, puis les quatre carrés du haut – vers l'avant –, puis les quatre carrés de droite – vers l'avant –, puis enfin les quatre carrés du bas – toujours vers l'avant (voir la figure 5a). Attention cependant, le dernier pliage doit être accompagné d'une manipulation un peu délicate permettant au résultat final d'être invariant par rotation d'un quart de tour: il faut lors du dernier pliage faire passer le carré de papier, qui sans manipulation particulière se serait trouvé tout en dessous en bas à gauche, par-dessus les deux autres de la même pile.

Cette opération serait impossible si les 12 carrés étaient rigides, mais grâce à la souplesse du papier on peut y arriver... sans rien déchirer. Le résultat est une configuration stable: si vous jetez votre flexagone sans colle correctement plié, il ne se défait pas et pour revenir à la feuille trouée dépliée, il faut nécessairement à un moment ou un autre forcer le pliage.

Si vous avez réussi le pliage, le flexagone peut s'ouvrir de quatre façons différentes – c'est l'opération de flexage pour ce type de flexagones – vous amenant dans quatre configurations nouvelles. Une sixième et une septième configurations existent aussi. La forme du graphe des sept configurations est une double boucle (voir la figure 4A).

Le second pliage du carré troué, que nous dénommerons « pliage asymétrique », consiste à replier alternativement les quatre carrés de la colonne de gauche – vers l'avant –, puis les quatre carrés du haut – vers l'arrière –, puis les quatre carrés de droite – vers l'avant –, puis enfin les quatre carrés du bas – vers l'avant. Attention, comme

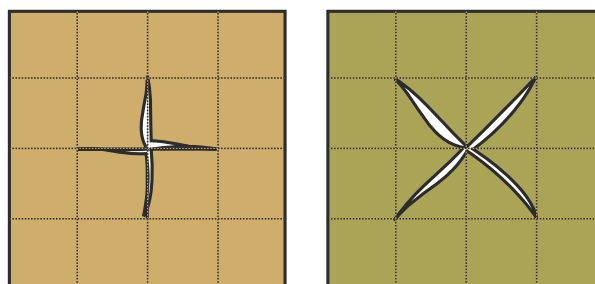


Cette forme est un des tétraflexagones sans colle de R. Neale : il possède six faces et peut se trouver dans sept configurations différentes. Autre exemple, [B] : le pliage asymétrique de la feuille trouée. Comme précédemment, il faut, lors de la dernière étape, permuter les carrés

en bas à gauche pour que celui qui se place naturellement au-dessus se retrouve en dessous. Si vous utilisez le coloriage destiné au pliage asymétrique et que vous faites le pliage symétrique, vous observerez une disposition intéressante...

précédemment, le dernier pliage doit être accompagné d'une manipulation (assez délicate à faire, mais il faut se laisser guider par le résultat à obtenir) faisant passer sur le dessus, le carré de papier qui sans manipulation particulière se serait trouvé en dessous dans le coin en bas à gauche. Le graphe des configurations cette fois ne comporte que 6 nœuds et c'est un carré muni de tiges conduisant à des configurations isolées (un peu plus difficiles à découvrir que les autres).

Les deux pliages particuliers que vous venez d'apprendre vous seront utiles pour quatre autres flexagones sans colle inventés par R. Neale. Partant cette fois d'une feuille de papier carrée avec quadrillage à 16 carrés (ou rectangles) mais sans trou, faites une entaille en forme de + et faites le pliage symétrique ou le pliage asymétrique (voir la figure 6). Nous vous laissons le plaisir de trouver vous-même les graphes des configurations de ces deux flexagones. En partant d'une entaille en forme de x, vous obtiendrez encore deux flexagones nouveaux, l'un avec le pliage symétrique, l'autre avec le pliage asymétrique. Amusez-vous bien. Y a-t-il d'autres flexagones sans colle à découvrir ?



6. Feuilles à entailles. En utilisant des feuilles entailées par un + ou un x comme l'indique le dessin et en opérant des pliages symétriques ou asymétriques (décrits sur les figures 5A et 5B), vous obtiendrez quatre nouveaux flexagones « sans colle » dont nous vous laissons le plaisir de découvrir l'espace des configurations.

rectilignes se généralise à des tubes aussi longs que l'on veut à condition bien sûr de faire un plus grand nombre de plis initiaux. À ma connaissance, le même problème avec non plus un tube, mais un sac (l'une des extrémités de la boîte est fermée) n'est pas résolu : peut-on retourner une boîte dont la surface est faite de polygones rigides reliés ? Si c'est possible, quels polygones faut-il choisir pour réussir le retournement de la boîte et quel est le détail des manipulations ? Toujours si c'est possible, quel est le nombre minimum de polygones que délimiteront les plis permettant le retournement d'une boîte à faces carrées ? La corne d'abondance des flexagones est encore pleine.

Le flexatube

Pour ceux qui aiment les casse-tête et les pliages, une des découvertes, qu'Arthur Stone fit en manipulant ses flexagones, mérite d'être plus connue, car elle est à la fois troublante et très belle. Il s'agit de ce qu'on appelle le flexatube. Partant d'une feuille de papier de taille 4×1 (4 carrés côte à côte) colorée en noir d'un côté et en blanc de l'autre, vous marquez quatre plis sur chaque carré, d'abord en suivant les deux diagonales, puis en suivant la verticale et l'horizontale passant par le centre. Vous joignez ensuite les deux extrémités de la bande que vous fixez avec du papier adhésif (voir la figure 5). Cela vous conduit à une sorte de cylindre à section carrée, autrement dit à une boîte cubique sans fond ni couvercle.

Le but du casse-tête est d'inverser l'intérieur et l'extérieur, en n'utilisant que les plis marqués avant le collage. L'opération est possible, mais n'est pas évidente. En fait, il y a deux solutions très différentes, mais aucune n'est facile (la figure 5 en propose une). Ce retournement d'un tube aussi large que haut en n'utilisant qu'un nombre fini de plis

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Univ. de Lille.

Martin GARDNER, *Flexagons*, in *Scientific American*, pp. 162-166, déc. 1956.

Les POOK, *Flexagons Inside Out*, Cambridge University Press, 2003.

Robert NEALE, *Self-Designing Tetraflexagons*, in *The Mathemagician and Pied Puzzler. A Collection in Tribute to Martin Gardner*, sous la direction de Elwyn Berlekamps et Tom Rodgers, A. K. Peter, Ltd, Natick, MA, 1999.

Harold MCINTOSH, *A Quick Flexagon Survey*, 2003 : <http://delta.cs.cinvestav.mx/~ffmcintosh/oldweb/pflexagon.html>

Highland Game : <http://www.halfpast.demon.co.uk/html/tt.html>. Boutique en ligne proposant des flexagones dont (a) le flexatube nommé *Table Teaser* ; (b) le trihexaflexagone nommé *Crafty coaster* ; (c) le hexahexaflexagone nommé *Kaleidoscope*.

David MITCHELL, *The Magic of Flexagons*, Norfolk, England, 1998.