

Savoir QUAND s'arrêter

Theodore Hill

Toute décision comporte des risques. Choisir le meilleur moment pour agir ou pour se retirer est crucial. Quand une entreprise d'informatique élabore une nouvelle version de son logiciel phare, elle doit décider quand s'arrêter de la parfaire et la mettre sur le marché. Lorsqu'un cyclone s'approche, les autorités doivent déterminer quand il est temps de commencer à évacuer. Un mauvais choix peut se solder par un désastre. Napoléon en a fait la triste expérience après avoir envahi la Russie. Avec des conséquences moins graves, nous sommes constamment confrontés à des décisions d'arrêt, que nous cherchions une meilleure place de stationnement, répondions à une offre d'emploi ou préparions notre départ à la retraite.

Tous ces problèmes s'inscrivent dans un même cadre : un processus évolue dans le temps en faisant intervenir une part d'aléas et, en se fondant seulement sur l'information disponible, on doit décider comment maximiser la récompense ou minimiser le coût. Parfois, on dispose de peu d'information sur la suite des événements. Dans d'autres cas, l'information abonde. Personne ne prédit l'avenir avec une certitude absolue, mais, heureusement, la puissance de la théorie des probabilités augmente parfois les chances de faire le bon choix.

La science des probabilités est assez récente. L'un des premiers écrits sur les probabilités, *De ludo aleae* de l'Italien Jérôme Cardan, datant de 1564 et qui dut attendre un siècle avant d'être publié, analyse essentiellement les jeux de dés. On attribue généralement les débuts mathématiques des probabilités à un échange de lettres en 1654 entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat. Eux aussi s'intéressaient aux probabilités en relation avec les lancers de dés, pour déterminer par exemple s'il est raisonnable de parier un contre un qu'un double six se réalisera en 24 lancers de deux dés non pipés. Certains soutenaient que oui, mais la véritable probabilité d'obtenir un double six en 24 lancers est d'environ 49,1 pour cent.

Cette correspondance a inspiré d'importantes avancées réalisées par d'autres mathématiciens au XIX^e siècle. Cependant, il a fallu attendre longtemps une définition suffisamment précise des probabilités pour être utilisable efficacement en mathématiques ou dans les sciences expérimentales : ce n'est qu'en 1933 que le mathématicien russe Andreï Kolmogorov a donné aux probabilités un fondement axiomatique formel.

L'histoire des problèmes d'arrêt optimal, une branche de la théorie des probabilités, a également pour point de départ

les jeux de hasard. L'une des premières découvertes est due au mathématicien anglais Arthur Cayley. En 1875, il trouva une stratégie d'arrêt optimal pour l'achat de billets de loterie – stratégie à laquelle on trouva peu à peu des applications plus larges.

Durant la Seconde Guerre mondiale, l'Américain d'origine hongroise Abraham Wald et d'autres mathématiciens ont développé le domaine de l'analyse séquentielle statistique pour aider les militaires et les industriels confrontés à des paris stratégiques faisant intervenir des quantités énormes d'hommes et de matériel. Peu après la guerre, l'Américain Richard Bellman a inventé la programmation dynamique afin d'obtenir des stratégies optimales pour de nombreux autres problèmes d'arrêt. Dans les années 1970, la théorie de l'arrêt optimal s'est érigée au rang d'outil essentiel dans la finance quand Fischer Black et Myron Scholes ont découvert une formule pionnière pour évaluer les actions boursières. Cela a transformé les marchés financiers du monde entier, et a valu à M. Scholes et son collègue Robert Merton le prix Nobel 1997 d'économie (Black était décédé entre-temps).

La formule de Black-Scholes est aujourd'hui au fondement de l'évaluation des options financières, et les outils d'arrêt optimal qui la sous-tendent restent un domaine



Dans les jeux de hasard, les mathématiques indiquent parfois quel est le meilleur moment pour s'arrêter de jouer. Ces stratégies d'arrêt optimal s'appliquent aussi dans d'autres situations.

de recherche très actif. Mais même les outils élémentaires de la théorie de l'arrêt optimal offrent déjà des solutions puissantes, pratiques et parfois surprenantes.

Supposons que vous soyez une femme ayant décidé de se marier, et que pour sélectionner l'homme de votre vie, vous ayez un entretien avec un maximum de 100 candidats. Les entretiens sont conduits dans un ordre aléatoire, et vous n'avez aucune information sur les candidats auxquels vous n'avez pas encore parlé. Après chaque entretien, vous avez le choix entre épouser le prétendant ou perdre à jamais la possibilité de le faire (*voir la figure 1*). Si vous ne vous êtes pas mariée après le 99^e entretien, alors vous devrez épouser le centième candidat. L'objectif est évidemment d'épouser le meilleur des 100 prétendants.

Choisir le bon prétendant

Le problème a une longue et riche histoire dans la littérature mathématique, où on le rencontre sous toutes sortes de noms : problème du mariage, de la secrétaire, de la princesse, de la dot, du meilleur choix... Certes, vous pouvez sélectionner le meilleur époux avec une probabilité d'au moins $1/100$ en épousant tout simplement la première personne. Mais pou-

vez-vous faire mieux ? En fait, il existe une règle garantissant que vous épouserez le meilleur de tous les prétendants plus d'une fois sur trois. Et cette règle peut se transposer à d'autres scénarios.

Enrôlé dans l'armée de l'air américaine durant la guerre du Vietnam, John Elton, aujourd'hui mathématicien à l'Institut de technologie de Géorgie, avait transformé le problème du mariage en une combine pour se faire de l'argent à la caserne. J. Elton demandait à ses camarades aviateurs d'inscrire 100 nombres différents, positifs ou négatifs, aussi grands ou petits qu'ils voulaient, sur 100 bouts de papier, de les mettre à l'envers sur une table et de les mélanger. Il pariait avec eux qu'en retournant les papiers un par un, il saurait s'arrêter sur le plus grand nombre avant de tous les retourner.

J. Elton avait convaincu ses camarades qu'il était « évident » que ses chances de gagner étaient infimes et leur demandait dix dollars s'il gagnait, tandis qu'il leur offrait un dollar s'il perdait. Les parieurs se bouscuaient. Même si J. Elton perdait presque les deux tiers des fois, il en gagnait dans plus du tiers. Et avec cette mise de dix contre un, il empocha une belle somme. Comment est-ce possible ?

Tout d'abord, il faut savoir qu'il existe une stratégie très simple pour gagner dans

L'ESSENTIEL

✓ Le problème de l'arrêt optimal consiste à déterminer quand il convient d'interrompre un processus faisant intervenir une part de hasard, afin de maximiser un gain moyen ou minimiser un coût moyen.

✓ Les mathématiciens ont déterminé des stratégies optimales dans de nombreux cas de figure, par exemple pour un jeu consistant à s'arrêter sur le maximum de points affichés par un dé lancé cinq fois au plus.

✓ Mais même certaines questions simples sur des tirages à pile ou face sont encore non résolues.

© Shutterstock/3difs