



Dans les jeux de hasard, les mathématiques indiquent parfois quel est le meilleur moment pour s'arrêter de jouer. Ces stratégies d'arrêt optimal s'appliquent aussi dans d'autres situations.

de recherche très actif. Mais même les outils élémentaires de la théorie de l'arrêt optimal offrent déjà des solutions puissantes, pratiques et parfois surprenantes.

Supposons que vous soyez une femme ayant décidé de se marier, et que pour sélectionner l'homme de votre vie, vous ayez un entretien avec un maximum de 100 candidats. Les entretiens sont conduits dans un ordre aléatoire, et vous n'avez aucune information sur les candidats auxquels vous n'avez pas encore parlé. Après chaque entretien, vous avez le choix entre épouser le prétendant ou perdre à jamais la possibilité de le faire (*voir la figure 1*). Si vous ne vous êtes pas mariée après le 99^e entretien, alors vous devrez épouser le centième candidat. L'objectif est évidemment d'épouser le meilleur des 100 prétendants.

Choisir le bon prétendant

Le problème a une longue et riche histoire dans la littérature mathématique, où on le rencontre sous toutes sortes de noms : problème du mariage, de la secrétaire, de la princesse, de la dot, du meilleur choix... Certes, vous pouvez sélectionner le meilleur époux avec une probabilité d'au moins $1/100$ en épousant tout simplement la première personne. Mais pou-

vez-vous faire mieux ? En fait, il existe une règle garantissant que vous épouserez le meilleur de tous les prétendants plus d'une fois sur trois. Et cette règle peut se transposer à d'autres scénarios.

Enrôlé dans l'armée de l'air américaine durant la guerre du Vietnam, John Elton, aujourd'hui mathématicien à l'Institut de technologie de Géorgie, avait transformé le problème du mariage en une combine pour se faire de l'argent à la caserne. J. Elton demandait à ses camarades aviateurs d'inscrire 100 nombres différents, positifs ou négatifs, aussi grands ou petits qu'ils voulaient, sur 100 bouts de papier, de les mettre à l'envers sur une table et de les mélanger. Il pariait avec eux qu'en retournant les papiers un par un, il saurait s'arrêter sur le plus grand nombre avant de tous les retourner.

J. Elton avait convaincu ses camarades qu'il était « évident » que ses chances de gagner étaient infimes et leur demandait dix dollars s'il gagnait, tandis qu'il leur offrait un dollar s'il perdait. Les parieurs se bouscuaient. Même si J. Elton perdait presque les deux tiers des fois, il en gagnait dans plus du tiers. Et avec cette mise de dix contre un, il empocha une belle somme. Comment est-ce possible ?

Tout d'abord, il faut savoir qu'il existe une stratégie très simple pour gagner dans

L'ESSENTIEL

✓ Le problème de l'arrêt optimal consiste à déterminer quand il convient d'interrompre un processus faisant intervenir une part de hasard, afin de maximiser un gain moyen ou minimiser un coût moyen.

✓ Les mathématiciens ont déterminé des stratégies optimales dans de nombreux cas de figure, par exemple pour un jeu consistant à s'arrêter sur le maximum de points affichés par un dé lancé cinq fois au plus.

✓ Mais même certaines questions simples sur des tirages à pile ou face sont encore non résolues.

© Shutterstock/3difs



1. DANS LE PROBLÈME DU MARIAGE, une personne auditionne un à un les candidats. À chaque audition, soit elle épouse le prétendant, soit elle l'élimine définitivement. Une stratégie permet de choisir le meilleur candidat avec une probabilité assez élevée : auditionner environ un tiers des prétendants, puis s'arrêter sur le premier prétendant qui soit meilleur que ceux déjà passés.

✓ SUR LE WEB

T. Ferguson, *Optimal stopping and applications* : www.math.ucla.edu/fftom/Stopping/Contents.html

✓ BIBLIOGRAPHIE

F. T. Bruss et G. Louchard, *The odds algorithm based on sequential updating and its performance*, *Advances in Applied Probability*, vol. 41, n° 1, pp. 131-153, 2009.

N. Gauvrit, *Vous avez dit hasard ?*, Belin, 2009.

S. Jacka et al., *Optimal stopping with applications*, numéro spécial de *Stochastics*, vol. 79, n° 1-4, 2007.

F. T. Bruss, *Le bon choix... raisonné*, *Pour la Science*, n° 335, pp. 56-61, septembre 2005.

F. T. Bruss, *Sum the odds to one and stop*, *Annals of Probability*, vol. 28, pp. 1384-1391, 2000.

T. Hill et U. Krengel, *Minimax-optimal stop rules and distributions in marriage problems*, *Annals of Probability*, vol. 19, pp. 342-353, 1992.

plus d'un quart des cas, ce qui lui aurait déjà suffi à prendre l'avantage. Qualifions un nombre observé de « record » s'il s'agit du nombre le plus grand rencontré jusqu'à présent. Supposons que vous retourniez la moitié des cartes ou bouts de papier (ou que vous interviewiez les 50 premiers candidats au mariage) sans vous arrêter, quelle que soit la valeur, même élevée, du nombre écrit. Vous vous arrêtez ensuite au premier record atteint. Si le deuxième nombre plus élevé des 100 cartes se trouve être dans les 50 premières que vous retournez, et que le plus élevé se trouve dans la seconde moitié (ce qui se produit une fois sur quatre), alors vous gagnez.

Gagner plus d'une fois sur trois

Cette stratégie est bonne, mais il en existe une meilleure encore (voir la figure 2). N'observez que 37 cartes (ou époux potentiels) sans vous arrêter, puis arrêtez-vous au record suivant. John Gilbert et Frederick Mosteller, de l'Université Harvard, ont prouvé que cette stratégie est la meilleure et garantit que l'on s'arrêtera sur le plus grand nombre dans environ 37 pour cent des cas. Plus précisément, on montre qu'en observant $N/e \approx 37$ cartes, N étant le nombre total de cartes et e étant la base des logarithmes naturels ($e = 2,71828...$), on est sûr de gagner avec une probabilité supérieure à $1/e > 0,36$, quel que soit le nombre de cartes.

Parfois, le but est de s'arrêter sur l'un des k meilleurs nombres ou candidats parmi N . Autrement dit, vous gagnez si vous vous arrêtez sur l'un des k nombres les plus élevés. Aux jeux Olympiques ou aux courses, l'objectif correspond souvent au cas $k = 3$ (gagner une médaille ou être placé) plutôt que le tout ou rien du cas $k = 1$ (gagner la médaille d'or ou arriver en tête) qui est beaucoup plus risqué.

La stratégie optimale pour s'arrêter sur l'un des k meilleurs est semblable à celle pour s'arrêter sur le meilleur. Tout d'abord, il vous faut observer un nombre fixé de candidats sans vous arrêter, afin de constituer une base de référence. Puis, pour une autre série fixée de tentatives, arrêtez-vous si vous tombez sur un record. Comme ce sera provisoirement le meilleur, il est assez vraisemblable qu'il s'agira d'un des k meilleurs.

Si aucun record n'apparaît pendant cette durée, alors passez à l'étape suivante où vous vous arrêtez sur l'un des deux nombres les plus élevés pour une certaine durée fixée, et ainsi de suite. Pour $k = 2$, cette méthode garantit à plus de 57 pour cent de s'arrêter sur l'un des deux meilleurs, même s'il y a un million de cartes. Pour N petit, la probabilité est assez élevée. Ainsi, pour $N = 7$ et $k = 2$, la stratégie garantit que l'on gagne dans les deux tiers des cas (voir la figure 3).

Maintenant, supposons que vous ayez à décider quand s'arrêter dans un choix entre seulement deux cartes ($N = 2$) : vous en retournez une et vous devez juger si le nombre inscrit est supérieur au nombre caché sous l'autre carte. L'étonnant résultat, avancé à l'origine par David Blackwell, de l'Université de Californie à Berkeley, est que l'on peut gagner à ce jeu plus d'une fois sur deux (voir la figure 4).

À l'évidence, on peut gagner exactement une fois sur deux en s'arrêtant systématiquement sur le premier nombre, ou systématiquement sur le second, sans même les regarder. Mais pour gagner dans plus de la moitié des cas, on doit trouver un moyen d'utiliser l'information liée au premier nombre pour décider s'il convient de s'arrêter ou pas.

Une règle d'arrêt qui le permet est la suivante. Tout d'abord, générez un nombre aléatoire R selon une loi gaussienne (loi de distribution statistique classique, dont la courbe représentative – en abscisse les nombres, en ordonnée leurs fréquences de tirage – a une forme de cloche) à l'aide d'un ordinateur ou d'un autre dispositif. Retournez alors l'une des cartes et lisez le nombre écrit dessus. Si R est supérieur au nombre observé, continuez et retournez la seconde carte. Si R est inférieur, restez-en au nombre indiqué sur la première carte.

Comment une stratégie aussi simple garantit-elle de gagner dans plus de la moitié des cas ? Notons N_1 et N_2 les deux nombres inscrits, avec $N_1 < N_2$. Soit p la probabilité (inconnue *a priori*) de choisir, selon la loi gaussienne, un nombre R inférieur à N_1 , et q la probabilité de choisir un R supérieur à N_2 (voir la figure 4).

Supposons R inférieur à N_1 ; dans cette hypothèse, vraie avec la probabilité p , vous gagnez une fois sur deux, donc avec une probabilité $p/2$. Si R est supérieur à N_2 , situation de probabilité q , vous gagnez encore une fois sur deux, donc avec la probabilité $q/2$. Mais si R tombe entre les deux