



1. DANS LE PROBLÈME DU MARIAGE, une personne auditionne un à un les candidats. À chaque audition, soit elle épouse le prétendant, soit elle l'élimine définitivement. Une stratégie permet de choisir le meilleur candidat avec une probabilité assez élevée : auditionner environ un tiers des prétendants, puis s'arrêter sur le premier prétendant qui soit meilleur que ceux déjà passés.

✓ SUR LE WEB

T. Ferguson, *Optimal stopping and applications* : www.math.ucla.edu/fftom/Stopping/Contents.html

✓ BIBLIOGRAPHIE

F. T. Bruss et G. Louchard, *The odds algorithm based on sequential updating and its performance*, *Advances in Applied Probability*, vol. 41, n° 1, pp. 131-153, 2009.

N. Gauvrit, *Vous avez dit hasard ?*, Belin, 2009.

S. Jacka et al., *Optimal stopping with applications*, numéro spécial de *Stochastics*, vol. 79, n° 1-4, 2007.

F. T. Bruss, *Le bon choix... raisonné*, *Pour la Science*, n° 335, pp. 56-61, septembre 2005.

F. T. Bruss, *Sum the odds to one and stop*, *Annals of Probability*, vol. 28, pp. 1384-1391, 2000.

T. Hill et U. Krengel, *Minimax-optimal stop rules and distributions in marriage problems*, *Annals of Probability*, vol. 19, pp. 342-353, 1992.

plus d'un quart des cas, ce qui lui aurait déjà suffi à prendre l'avantage. Qualifions un nombre observé de « record » s'il s'agit du nombre le plus grand rencontré jusqu'à présent. Supposons que vous retourniez la moitié des cartes ou bouts de papier (ou que vous interviewiez les 50 premiers candidats au mariage) sans vous arrêter, quelle que soit la valeur, même élevée, du nombre écrit. Vous vous arrêtez ensuite au premier record atteint. Si le deuxième nombre plus élevé des 100 cartes se trouve être dans les 50 premières que vous retournez, et que le plus élevé se trouve dans la seconde moitié (ce qui se produit une fois sur quatre), alors vous gagnez.

Gagner plus d'une fois sur trois

Cette stratégie est bonne, mais il en existe une meilleure encore (voir la figure 2). N'observez que 37 cartes (ou époux potentiels) sans vous arrêter, puis arrêtez-vous au record suivant. John Gilbert et Frederick Mosteller, de l'Université Harvard, ont prouvé que cette stratégie est la meilleure et garantit que l'on s'arrêtera sur le plus grand nombre dans environ 37 pour cent des cas. Plus précisément, on montre qu'en observant $N/e \approx 37$ cartes, N étant le nombre total de cartes et e étant la base des logarithmes naturels ($e = 2,71828...$), on est sûr de gagner avec une probabilité supérieure à $1/e > 0,36$, quel que soit le nombre de cartes.

Parfois, le but est de s'arrêter sur l'un des k meilleurs nombres ou candidats parmi N . Autrement dit, vous gagnez si vous vous arrêtez sur l'un des k nombres les plus élevés. Aux jeux Olympiques ou aux courses, l'objectif correspond souvent au cas $k = 3$ (gagner une médaille ou être placé) plutôt que le tout ou rien du cas $k = 1$ (gagner la médaille d'or ou arriver en tête) qui est beaucoup plus risqué.

La stratégie optimale pour s'arrêter sur l'un des k meilleurs est semblable à celle pour s'arrêter sur le meilleur. Tout d'abord, il vous faut observer un nombre fixé de candidats sans vous arrêter, afin de constituer une base de référence. Puis, pour une autre série fixée de tentatives, arrêtez-vous si vous tombez sur un record. Comme ce sera provisoirement le meilleur, il est assez vraisemblable qu'il s'agira d'un des k meilleurs.

Si aucun record n'apparaît pendant cette durée, alors passez à l'étape suivante où vous vous arrêtez sur l'un des deux nombres les plus élevés pour une certaine durée fixée, et ainsi de suite. Pour $k = 2$, cette méthode garantit à plus de 57 pour cent de s'arrêter sur l'un des deux meilleurs, même s'il y a un million de cartes. Pour N petit, la probabilité est assez élevée. Ainsi, pour $N = 7$ et $k = 2$, la stratégie garantit que l'on gagne dans les deux tiers des cas (voir la figure 3).

Maintenant, supposons que vous ayez à décider quand s'arrêter dans un choix entre seulement deux cartes ($N = 2$) : vous en retournez une et vous devez juger si le nombre inscrit est supérieur au nombre caché sous l'autre carte. L'étonnant résultat, avancé à l'origine par David Blackwell, de l'Université de Californie à Berkeley, est que l'on peut gagner à ce jeu plus d'une fois sur deux (voir la figure 4).

À l'évidence, on peut gagner exactement une fois sur deux en s'arrêtant systématiquement sur le premier nombre, ou systématiquement sur le second, sans même les regarder. Mais pour gagner dans plus de la moitié des cas, on doit trouver un moyen d'utiliser l'information liée au premier nombre pour décider s'il convient de s'arrêter ou pas.

Une règle d'arrêt qui le permet est la suivante. Tout d'abord, générez un nombre aléatoire R selon une loi gaussienne (loi de distribution statistique classique, dont la courbe représentative – en abscisse les nombres, en ordonnée leurs fréquences de tirage – a une forme de cloche) à l'aide d'un ordinateur ou d'un autre dispositif. Retournez alors l'une des cartes et lisez le nombre écrit dessus. Si R est supérieur au nombre observé, continuez et retournez la seconde carte. Si R est inférieur, restez-en au nombre indiqué sur la première carte.

Comment une stratégie aussi simple garantit-elle de gagner dans plus de la moitié des cas ? Notons N_1 et N_2 les deux nombres inscrits, avec $N_1 < N_2$. Soit p la probabilité (inconnue *a priori*) de choisir, selon la loi gaussienne, un nombre R inférieur à N_1 , et q la probabilité de choisir un R supérieur à N_2 (voir la figure 4).

Supposons R inférieur à N_1 ; dans cette hypothèse, vraie avec la probabilité p , vous gagnez une fois sur deux, donc avec une probabilité $p/2$. Si R est supérieur à N_2 , situation de probabilité q , vous gagnez encore une fois sur deux, donc avec la probabilité $q/2$. Mais si R tombe entre les deux

nombre inscrits ($N_1 < R < N_2$), situation qui se produit avec une probabilité strictement positive égale à $1 - p - q$ (la distribution gaussienne attribue une probabilité positive à tout intervalle), alors vous gagnez à chaque fois, c'est-à-dire avec la probabilité $1 - p - q$.

Au total, en prenant en compte les trois situations possibles pour le nombre R choisi, vous gagnez avec la probabilité $p/2 + q/2 + 1 - p - q$. Or cette probabilité, qui s'écrit aussi $1/2 + (1 - p - q)/2$, est supérieure à $1/2$, puisque $1 - p - q$ est positif. Par exemple, si les deux nombres cachés sont 1 et π , la loi gaussienne donne p égal à environ 0,8413 et q égal à environ 0,0008; il s'ensuit qu'avec la stratégie indiquée, la probabilité de sélectionner le plus grand des deux nombres est supérieure à 57 pour cent.

Bien sûr, si la personne qui écrit les nombres sait que vous utilisez la stratégie gaussienne, elle peut, en choisissant des nombres N_1 et N_2 très proches, ramener votre probabilité de gagner au plus près de $1/2$. Si elle n'est pas complètement libre de choisir n'importe quels nombres, mais est obligée par exemple de prendre des entiers compris entre 1 et 100, alors il lui sera impossible de rendre votre probabilité de gagner arbitrairement proche de $1/2$.

Récurrance à rebours

Au lieu de ne disposer, comme précédemment, d'aucune information préalable sur les valeurs impliquées, on peut avoir une information complète sur les probabilités et les valeurs exactes de toutes les observations potentielles futures. Considérons un jeu consistant à lancer au maximum cinq fois un dé à six faces. Vous pouvez vous arrêter quand vous voulez et recevoir alors comme récompense autant de Krugerrands (pièces d'or sud-africaines, dont la valeur actuelle avoisine 750 euros) que de points affichés par le dé au moment où vous vous arrêtez.

Contrairement aux problèmes de mariage sans information, ici tout est connu. Les résultats possibles de chaque lancer sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6, et la probabilité de chacun à chaque lancer est d'un sixième. Il s'agit de trouver la règle d'arrêt qui maximise le nombre de Krugerrands que l'on peut espérer gagner en moyenne.

Si vous vous arrêtez toujours au premier lancer, par exemple, le gain sera simplement l'espérance mathématique d'une variable aléatoire qui prend les valeurs 1,

2, 3, 4, 5 ou 6 avec une probabilité $1/6$ pour chacune. En d'autres termes, une fois sur six vous gagnerez un Krugerrand, une fois sur six vous en gagnerez deux, etc., ce qui donne l'espérance mathématique: $1(1/6) + 2(1/6) + 3(1/6) + 4(1/6) + 5(1/6) + 6(1/6) = 7/2$.

Ainsi, si vous vous arrêtez toujours au premier lancer, vous gagnerez 3,5 Krugerrands en moyenne. Bien sûr, il n'est pas optimal de s'arrêter au premier lancer s'il donne un 1, et il est toujours optimal de s'arrêter si l'on a obtenu un 5 au premier lancer? Une méthode générale puissante pour résoudre ce type de problème est la «récurrance à rebours».

Il est évidemment optimal de s'arrêter au premier lancer si la valeur affichée

		-37,2		1001				72
29	0		17		-362,5		-88	0,07
		98,6	224				-6	3,14
-99	29983				1234			
			22					-856
	14332			-1788	1500			60
31	-2009		0,51			365	7,5	
					273			-68
	555	1800	59		-311		9822,1	
				77		214		2727

① Retourner 37 cartes sans s'arrêter et repérer le nombre le plus élevé

		-37,2		1001		911		72
29	0		17		-362,5		-88	0,07
		98,6	224				-6	3,14
-99	29983				1234			
		6777	22				11,11	-856
	14332			-1788	1500			60
31	-2009		43433			365	7,5	
					273			-68
	555	1800	59		-311		9822,1	-40
				77		214		2727

② Continuer à retourner des cartes en s'arrêtant dès que l'on tombe sur un «record»

2. S'IL FAUT TROUVER le plus grand nombre parmi 100 écrits sur des cartes retournées, une bonne stratégie est de retourner d'abord 37 cartes, puis de continuer et de s'arrêter sur le premier nombre supérieur à ceux déjà vus. On démontre que l'on gagne ainsi dans 37 pour cent des cas.

L'AUTEUR



Theodore HILL est professeur émérite de mathématiques à l'Institut de technologie de Géorgie, aux États-Unis.

Nous remercions la revue *American Scientist* de nous avoir autorisés à reproduire cet article.