

nombre inscrits ($N_1 < R < N_2$), situation qui se produit avec une probabilité strictement positive égale à $1 - p - q$ (la distribution gaussienne attribue une probabilité positive à tout intervalle), alors vous gagnez à chaque fois, c'est-à-dire avec la probabilité $1 - p - q$.

Au total, en prenant en compte les trois situations possibles pour le nombre R choisi, vous gagnez avec la probabilité $p/2 + q/2 + 1 - p - q$. Or cette probabilité, qui s'écrit aussi $1/2 + (1 - p - q)/2$, est supérieure à $1/2$, puisque $1 - p - q$ est positif. Par exemple, si les deux nombres cachés sont 1 et π , la loi gaussienne donne p égal à environ 0,8413 et q égal à environ 0,0008; il s'ensuit qu'avec la stratégie indiquée, la probabilité de sélectionner le plus grand des deux nombres est supérieure à 57 pour cent.

Bien sûr, si la personne qui écrit les nombres sait que vous utilisez la stratégie gaussienne, elle peut, en choisissant des nombres N_1 et N_2 très proches, ramener votre probabilité de gagner au plus près de $1/2$. Si elle n'est pas complètement libre de choisir n'importe quels nombres, mais est obligée par exemple de prendre des entiers compris entre 1 et 100, alors il lui sera impossible de rendre votre probabilité de gagner arbitrairement proche de $1/2$.

Récurrance à rebours

Au lieu de ne disposer, comme précédemment, d'aucune information préalable sur les valeurs impliquées, on peut avoir une information complète sur les probabilités et les valeurs exactes de toutes les observations potentielles futures. Considérons un jeu consistant à lancer au maximum cinq fois un dé à six faces. Vous pouvez vous arrêter quand vous voulez et recevoir alors comme récompense autant de Krugerrands (pièces d'or sud-africaines, dont la valeur actuelle avoisine 750 euros) que de points affichés par le dé au moment où vous vous arrêtez.

Contrairement aux problèmes de mariage sans information, ici tout est connu. Les résultats possibles de chaque lancer sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6, et la probabilité de chacun à chaque lancer est d'un sixième. Il s'agit de trouver la règle d'arrêt qui maximise le nombre de Krugerrands que l'on peut espérer gagner en moyenne.

Si vous vous arrêtez toujours au premier lancer, par exemple, le gain sera simplement l'espérance mathématique d'une variable aléatoire qui prend les valeurs 1,

2, 3, 4, 5 ou 6 avec une probabilité $1/6$ pour chacune. En d'autres termes, une fois sur six vous gagnerez un Krugerrand, une fois sur six vous en gagnerez deux, etc., ce qui donne l'espérance mathématique : $1(1/6) + 2(1/6) + 3(1/6) + 4(1/6) + 5(1/6) + 6(1/6) = 7/2$.

Ainsi, si vous vous arrêtez toujours au premier lancer, vous gagnerez 3,5 Krugerrands en moyenne. Bien sûr, il n'est pas optimal de s'arrêter au premier lancer s'il donne un 1, et il est toujours optimal de s'arrêter si l'on a obtenu un 5 au premier lancer ? Une méthode générale puissante pour résoudre ce type de problème est la « récurrence à rebours ».

Il est évidemment optimal de s'arrêter au premier lancer si la valeur affichée

		-37,2		1001				72
29	0		17		-362,5		-88	0,07
		98,6	224				-6	3,14
-99	29983				1234			
			22				-856	
	14332		-1788	1500				60
31	-2009		0,51		365	7,5		
					273			-68
	555	1800	59		-311		9822,1	
				77		214		2727

① Retourner 37 cartes sans s'arrêter et repérer le nombre le plus élevé

		-37,2		1001		911		72
29	0		17		-362,5		-88	0,07
		98,6	224				-6	3,14
-99	29983				1234			
		6777	22				11,11	-856
	14332		-1788	1500				60
31	-2009		43433		365	7,5		
					273			-68
	555	1800	59		-311		9822,1	-40
				77		214		2727

② Continuer à retourner des cartes en s'arrêtant dès que l'on tombe sur un « record »

2. S'IL FAUT TROUVER le plus grand nombre parmi 100 écrits sur des cartes retournées, une bonne stratégie est de retourner d'abord 37 cartes, puis de continuer et de s'arrêter sur le premier nombre supérieur à ceux déjà vus. On démontre que l'on gagne ainsi dans 37 pour cent des cas.

L'AUTEUR



Theodore HILL est professeur émérite de mathématiques à l'Institut de technologie de Géorgie, aux États-Unis.

Nous remercions la revue *American Scientist* de nous avoir autorisés à reproduire cet article.