

par le dé est supérieure à celle attendue dans le cas où vous continuez à lancer le dé après avoir rejeté le premier lancer. Cela vous placerait dans un nouveau jeu où vous n'avez droit qu'à quatre lancers, dont l'espérance mathématique est également inconnue au départ. La stratégie optimale dans un problème à quatre lancers, à son tour, est de s'arrêter au premier lancer si la valeur obtenue est supérieure au gain espéré en continuant avec un problème à trois lancers, et ainsi de suite. On aboutit au problème à un lancer, pour lequel il n'y a qu'une stratégie, à savoir s'arrêter, et la récompense attendue est l'espérance mathématique d'un unique lancer de dé, dont nous avons vu qu'elle vaut 3,5 (voir la figure 6).

Cette information nous donne à son tour la stratégie optimale d'un problème à deux lancers : s'arrêter au premier lancer si la valeur est supérieure à ce que vous espérez gagner en continuant, c'est-à-dire supérieure à 3,5. Nous connaissons donc maintenant la stratégie optimale pour un

problème à deux lancers (s'arrêter au premier lancer si c'est un 4, un 5 ou un 6, continuer sinon) et cela permet de calculer la récompense espérée.

Dans un problème à deux lancers, on gagne 4, 5 ou 6 au premier lancer avec une probabilité de $1/6$ chacun, et l'on s'arrête. Sinon (quand le premier lancer est un 1, un 2 ou un 3, situation qui se produit une fois sur deux), on continue, auquel cas on s'attend à gagner 3,5 en moyenne. Ainsi, la récompense attendue pour le problème à deux lancers est :

$$4(1/6) + 5(1/6) + 6(1/6) + (1/2)(3,5) = 4,25.$$

Stratégie optimale

Cela fournit maintenant la stratégie optimale pour un problème à trois lancers, à savoir s'arrêter si le premier lancer est un 5 ou un 6 (c'est-à-dire supérieur à 4,25), et sinon continuer et ne s'arrêter que si le second lancer est un 4, 5 ou 6, et dans le cas contraire poursuivre avec un troisième

et dernier lancer. La connaissance de cette récompense attendue pour trois lancers donne à son tour la stratégie optimale pour un problème à quatre lancers : ne s'arrêter au premier lancer que s'il donne un 5 ou un 6, s'arrêter au second lancer si c'est un 5 ou un 6, au troisième si c'est un 5 ou un 6, au quatrième si c'est un 4, un 5 ou un 6, et sinon aller jusqu'au lancer final. Cette stratégie garantit que vous gagnerez 5,12 Krugerrands en moyenne, et aucune stratégie n'est meilleure.

La méthode de la récurrence à rebours est polyvalente, et fonctionne aussi bien lorsque les valeurs du processus ne sont pas indépendantes (comme elles sont supposées l'être lorsqu'on lance plusieurs fois le dé), ou s'il s'agit de minimiser une espérance mathématique telle que le coût.

Supposons qu'une entreprise doive acheter son approvisionnement hebdomadaire en énergie le lundi, mardi ou mercredi précédent et que la probabilité des prix à venir puisse être estimée sur la base de statistiques passées. Par exemple, si le lundi l'acheteur a l'occasion de payer l'énergie pour la semaine suivante à un prix de 100, il peut savoir d'expérience qu'il y a une probabilité $1/2$ pour que le prix du mardi soit 110, et 90 sinon. De plus, il sait que si le prix est égal à 110 le mardi, alors le prix sera de 115 le mercredi avec une probabilité égale à $1/3$, et de 100 autrement ; et que s'il vaut 90 le mardi, il a autant de chances de valoir 100 que 85 le mercredi.

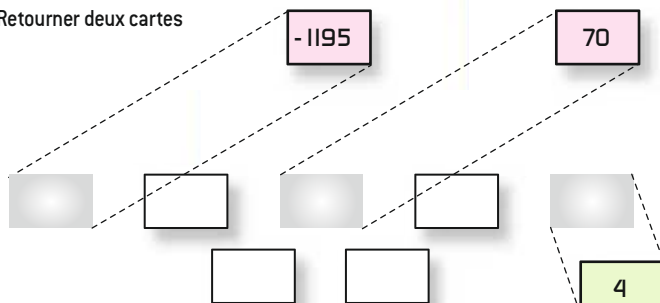
Par récurrence à rebours, on voit que la règle optimale pour le mardi est de ne pas acheter si le prix est de 110, puisque 110 est supérieur à l'espérance mathématique du prix s'il attend mercredi pour acheter, espérance égale à :

$$(1/3)(115) + (2/3)(100) = 105.$$

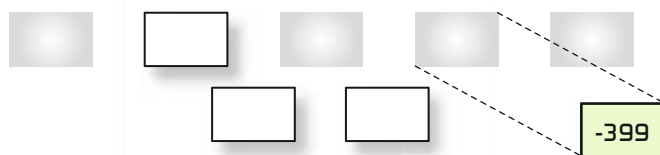
De la même façon, si le prix mardi est de 90, il est optimal d'acheter. En remontant jusqu'au lundi, puisque 100 est supérieur à l'espérance de prix s'il continue (à savoir $(1/2)(105) + (1/2)(90) = 97,5$), il est optimal de ne pas acheter le lundi. Ces éléments réunis constituent la stratégie optimale d'arrêt.

Dans le cas où l'information est complète, avec pour objectif de s'arrêter sur l'une des k plus grandes valeurs, on ignoreait quelles étaient les meilleures probabilités possibles de gagner pour des séquences finies générales de variables aléatoires indépendantes. En utilisant à la fois la récurrence normale et celle à rebours, et une classe de distributions

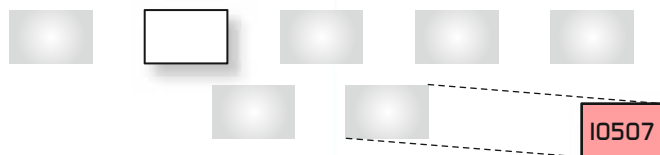
① Retourner deux cartes



② Retourner une troisième carte et s'arrêter seulement si c'est un « record »



③ Retourner une quatrième carte et s'arrêter seulement si c'est un « record »



④ Continuer de retourner les cartes et s'arrêter seulement si l'on tombe sur l'un des deux plus grands nombres obtenus jusque-là

3. S'IL S'AGIT DE S'ARRÊTER dès l'obtention d'une des k meilleures valeurs, on peut là aussi augmenter ses chances. Dans un scénario où l'on désire obtenir un des deux meilleurs choix sur sept, on peut gagner deux fois sur trois avec la stratégie indiquée.

statistiques nommées pyramides de Bernoulli, Douglas Kennedy, de l'Université de Cambridge, et moi avons découvert ces probabilités optimales. Nous avons prouvé vers 1992 que pour toute séquence finie de variables aléatoires indépendantes, il y a toujours une règle d'arrêt qui tombe sur la valeur la plus élevée avec une probabilité au moins égale à $1/e$, et une règle d'arrêt qui tombe sur l'une des deux valeurs les plus élevées avec une probabilité au moins égale à $(1 + \sqrt{2})\exp(-\sqrt{2})$, soit environ 0,59 – c'est le mieux que l'on puisse faire. Les probabilités de s'arrêter sur l'une des k valeurs les plus élevées ont des formules similaires.

Notons que les ordinateurs n'ont été d'aucune aide pour résoudre ce problème. En fait, tous les problèmes décrits dans cet article ont été résolus en utilisant des outils mathématiques classiques, en travaillant exemple après exemple avec du papier et un crayon; en résolvant le cas avec deux, trois, puis quatre inconnues; en cherchant des régularités; en attendant que viennent des idées lumineuses; enfin, en cherchant à démontrer formellement chaque étape.

Quand l'information n'est que partielle

Le cas où l'information n'est que partielle est le plus difficile. D'ordinaire, on ne sait pas d'avance combien de candidats il y aura à un emploi donné, ni les probabilités des valeurs futures des actions en Bourse. Dans ces situations, une méthode de résolution consiste à utiliser les outils de la théorie des jeux. Le problème de l'arrêt peut y être envisagé comme celui d'un décideur jouant contre un adversaire qui peut fixer les valeurs et les probabilités à sa guise.

Ulrich Krengel, de l'Université de Göttingen, et moi-même avons utilisé cette technique pour découvrir la stratégie optimale dans le problème dit du mariage, où seule une borne supérieure au nombre de candidats est connue.

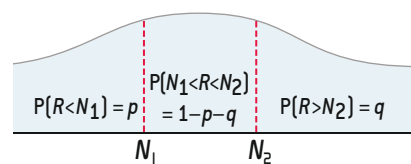
À titre d'exemple concret, considérons le problème consistant à sélectionner le plus grand nombre dans un chapeau contenant au moins une, et au plus cinq, cartes numérotées (si vous ne vous arrêtez pas et qu'il ne reste aucune carte, vous avez perdu). Nous avons démontré que la stratégie optimale dans ce cas est de s'arrêter à la première carte avec la probabilité 26/75. Si vous ne vous arrêtez pas à la première carte, alors vous continuez jusqu'à la

deuxième carte, s'il y en a une. Si le nombre de la deuxième carte est supérieur à celui de la première, arrêtez-vous avec la probabilité 26/49. Sinon, continuez, en vous arrêtant au premier record (ou lorsque vous avez épuisé vos cartes ou que vous êtes forcé de choisir le nombre de la cinquième carte). Cela garantit une probabilité de 26/75 de s'arrêter sur le nombre le plus élevé, quel que soit le nombre (entre un et cinq) de cartes déposées dans le chapeau.

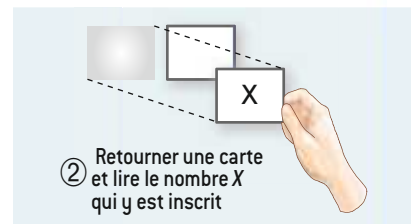
Il n'existe pas de meilleure stratégie. Nous avons trouvé les formules exactes pour toutes les limites possibles sur le nombre maximum de cartes, et les probabilités de gagner sont étonnamment élevées. Par exemple, si vous savez seulement qu'il y a entre 1 et 100 cartes dans le chapeau, il est encore possible de gagner environ une fois sur cinq. On peut utiliser exactement la même méthode pour obtenir les règles d'arrêt optimal dans de nombreux problèmes de la vie courante, par exemple quand un employeur veut embaucher le meilleur vendeur sur le marché, connaît le nombre maximum de candidats au poste, mais ignore combien d'entre eux ont déjà accepté une autre offre.

Dans un autre type de problème d'arrêt impliquant une information partielle, l'observateur connaît exactement la longueur de la séquence (par exemple le nombre de cartes), mais il ne dispose que d'une information partielle sur les valeurs (aléatoires) écrites sur les cartes. Au lieu de n'avoir aucune information du tout, ou de connaître toutes les valeurs et probabilités possibles, il pourrait ne connaître que la valeur moyenne et l'écart type de chaque variable aléatoire. Dans le cas où les variables sont indépendantes, Frans Boshuizen, de l'Université libre d'Amsterdam, et moi-même avons réussi à déterminer les règles d'arrêt optimal, mais les techniques que nous avons utilisées, issues notamment de la théorie des jeux, échouent dans la plupart des autres problèmes d'arrêt à information partielle.

Bien que de nombreux problèmes d'arrêt aient été résolus, il subsiste des problèmes très simples qui, de manière très frustrante, restent non résolus, même parmi ceux qui font intervenir une information complète. Mon préféré est le suivant. Vous tirez à pile ou face avec une pièce non truquée, en vous arrêtant quand vous voulez. La récompense est le nombre moyen de faces obtenues (nombre de faces divisé par le nombre

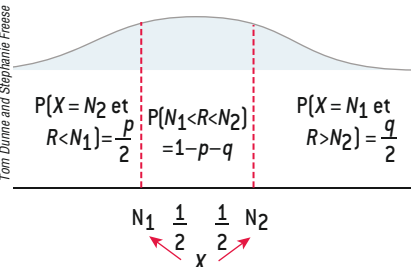


- ① Produire un nombre aléatoire R , selon une distribution gaussienne



- ② Retourner une carte et lire le nombre X qui y est inscrit

Tom Dume and Stephanie Freese



- ③ Ne retourner la seconde carte que si le nombre aléatoire R choisi est supérieur à X

4. MÊME LORSQU'IL S'AGIT DE CHOISIR entre deux cartes seulement, on peut réussir plus d'un coup sur deux. Il faut pour cela disposer d'un moyen de produire des nombres aléatoires R , tirés selon une loi continue, par exemple la loi gaussienne (loi en forme de cloche). N_1 et N_2 désignent ici les nombres portés par les deux cartes; X est le nombre porté par la première carte retournée; l'écriture $P(R < N_1) = p$, par exemple, signifie que la probabilité que R soit inférieure à N_1 est égale à p .