

statistiques nommées pyramides de Bernoulli, Douglas Kennedy, de l'Université de Cambridge, et moi avons découvert ces probabilités optimales. Nous avons prouvé vers 1992 que pour toute séquence finie de variables aléatoires indépendantes, il y a toujours une règle d'arrêt qui tombe sur la valeur la plus élevée avec une probabilité au moins égale à $1/e$, et une règle d'arrêt qui tombe sur l'une des deux valeurs les plus élevées avec une probabilité au moins égale à $(1 + \sqrt{2})\exp(-\sqrt{2})$, soit environ 0,59 – c'est le mieux que l'on puisse faire. Les probabilités de s'arrêter sur l'une des k valeurs les plus élevées ont des formules similaires.

Notons que les ordinateurs n'ont été d'aucune aide pour résoudre ce problème. En fait, tous les problèmes décrits dans cet article ont été résolus en utilisant des outils mathématiques classiques, en travaillant exemple après exemple avec du papier et un crayon; en résolvant le cas avec deux, trois, puis quatre inconnues; en cherchant des régularités; en attendant que viennent des idées lumineuses; enfin, en cherchant à démontrer formellement chaque étape.

Quand l'information n'est que partielle

Le cas où l'information n'est que partielle est le plus difficile. D'ordinaire, on ne sait pas d'avance combien de candidats il y aura à un emploi donné, ni les probabilités des valeurs futures des actions en Bourse. Dans ces situations, une méthode de résolution consiste à utiliser les outils de la théorie des jeux. Le problème de l'arrêt peut y être envisagé comme celui d'un décideur jouant contre un adversaire qui peut fixer les valeurs et les probabilités à sa guise.

Ulrich Krengel, de l'Université de Göttingen, et moi-même avons utilisé cette technique pour découvrir la stratégie optimale dans le problème dit du mariage, où seule une borne supérieure au nombre de candidats est connue.

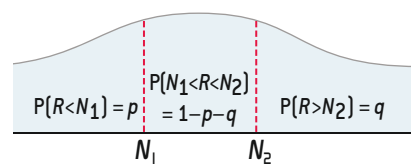
À titre d'exemple concret, considérons le problème consistant à sélectionner le plus grand nombre dans un chapeau contenant au moins une, et au plus cinq, cartes numérotées (si vous ne vous arrêtez pas et qu'il ne reste aucune carte, vous avez perdu). Nous avons démontré que la stratégie optimale dans ce cas est de s'arrêter à la première carte avec la probabilité 26/75. Si vous ne vous arrêtez pas à la première carte, alors vous continuez jusqu'à la

deuxième carte, s'il y en a une. Si le nombre de la deuxième carte est supérieur à celui de la première, arrêtez-vous avec la probabilité 26/49. Sinon, continuez, en vous arrêtant au premier record (ou lorsque vous avez épuisé vos cartes ou que vous êtes forcé de choisir le nombre de la cinquième carte). Cela garantit une probabilité de 26/75 de s'arrêter sur le nombre le plus élevé, quel que soit le nombre (entre un et cinq) de cartes déposées dans le chapeau.

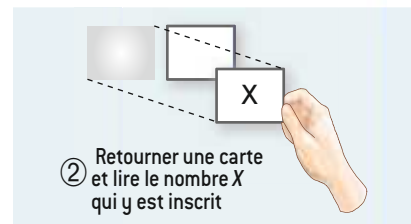
Il n'existe pas de meilleure stratégie. Nous avons trouvé les formules exactes pour toutes les limites possibles sur le nombre maximum de cartes, et les probabilités de gagner sont étonnamment élevées. Par exemple, si vous savez seulement qu'il y a entre 1 et 100 cartes dans le chapeau, il est encore possible de gagner environ une fois sur cinq. On peut utiliser exactement la même méthode pour obtenir les règles d'arrêt optimal dans de nombreux problèmes de la vie courante, par exemple quand un employeur veut embaucher le meilleur vendeur sur le marché, connaît le nombre maximum de candidats au poste, mais ignore combien d'entre eux ont déjà accepté une autre offre.

Dans un autre type de problème d'arrêt impliquant une information partielle, l'observateur connaît exactement la longueur de la séquence (par exemple le nombre de cartes), mais il ne dispose que d'une information partielle sur les valeurs (aléatoires) écrites sur les cartes. Au lieu de n'avoir aucune information du tout, ou de connaître toutes les valeurs et probabilités possibles, il pourrait ne connaître que la valeur moyenne et l'écart type de chaque variable aléatoire. Dans le cas où les variables sont indépendantes, Frans Boshuizen, de l'Université libre d'Amsterdam, et moi-même avons réussi à déterminer les règles d'arrêt optimal, mais les techniques que nous avons utilisées, issues notamment de la théorie des jeux, échouent dans la plupart des autres problèmes d'arrêt à information partielle.

Bien que de nombreux problèmes d'arrêt aient été résolus, il subsiste des problèmes très simples qui, de manière très frustrante, restent non résolus, même parmi ceux qui font intervenir une information complète. Mon préféré est le suivant. Vous tirez à pile ou face avec une pièce non truquée, en vous arrêtant quand vous voulez. La récompense est le nombre moyen de faces obtenues (nombre de faces divisé par le nombre

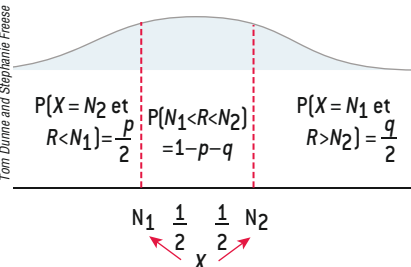


- ① Produire un nombre aléatoire R , selon une distribution gaussienne



- ② Retourner une carte et lire le nombre X qui y est inscrit

Tom Dume and Stephanie Freese



- ③ Ne retourner la seconde carte que si le nombre aléatoire R choisi est supérieur à X

4. MÊME LORSQU'IL S'AGIT DE CHOISIR entre deux cartes seulement, on peut réussir plus d'un coup sur deux. Il faut pour cela disposer d'un moyen de produire des nombres aléatoires R , tirés selon une loi continue, par exemple la loi gaussienne (loi en forme de cloche). N_1 et N_2 désignent ici les nombres portés par les deux cartes; X est le nombre porté par la première carte retournée; l'écriture $P(R < N_1) = p$, par exemple, signifie que la probabilité que R soit inférieure à N_1 est égale à p .

RÉSULTATS DES TIRAGES À PILE OU FACE	GAIN SI L'ON S'ARRÊTE	STRATÉGIE OPTIMALE
	1,00	 S'arrêter
	0,00	 Continuer
	0,50	 Continuer
	0,33	 Continuer
	0,67	 S'arrêter
	0,63	?

© Shutterstock/Petersmiller-photography

5. QUAND CONVIENT-IL D'ARRÊTER une séquence de tirages à pile ou face pour maximiser le nombre moyen de faces obtenues ? Cette question d'une simplicité trompeuse reste un problème non résolu. Il est

certain qu'il ne faut pas s'arrêter s'il n'y a pas une majorité absolue de faces. Mais quelle proportion de faces faut-il viser ? On ne le sait pas exactement.

de lancers) au moment où vous vous arrêtez (voir la figure 5).

Si votre premier lancer est une face et que vous vous arrêtez, votre récompense est ainsi de un Krugerrand. Puisque vous ne pourrez jamais avoir plus de 100 pour cent de faces, il est optimal de s'arrêter dans ce cas. Si, en revanche, le premier lancer tombe sur le côté pile, il est préférable de ne pas s'arrêter tout de suite, puisque votre récompense serait nulle. Supposez que le premier tirage soit pile, et le second face. Vous pouvez vous arrêter là et recevoir un demi-Krugerrand, ou bien continuer à tirer. Un peu de réflexion montre qu'il n'est jamais optimal de s'arrêter avec un demi-Krugerrand ou moins. En effet, en vertu de la loi des grands nombres, plus le nombre de lancers est grand, plus la proportion de faces s'approche de 50 pour cent, en oscillant aléatoirement au-dessus et au-dessous de cette valeur. S'arrêter à 50 pour cent n'est tout simplement pas assez ambitieux.

Avec un peu plus de difficulté, on montre que s'arrêter au troisième tirage après pile-face-face est optimal, et que s'arrêter la première fois qu'on observe plus de faces que de piles est optimal pendant un certain temps. Mais s'arrêter la première fois que vous avez davantage de faces que de piles ne reste pas éternellement optimal. Au bout d'un certain temps, on devrait s'arrêter seulement si l'on a deux faces de plus que de piles, puis après un deuxième temps critique, s'arrêter seulement si l'on a trois faces d'avance, et ainsi de suite.

Nombre maximal de lancers du dé	Arrêter si le premier lancer donne :	Gain moyen
1	1, 2, 3, 4, 5 ou 6	3,5
2	4, 5 ou 6	4,25
3	5 ou 6	4,67
4	5 ou 6	4,94
5	5 ou 6	5,13

© Shutterstock/Apple

6. ON CONSIDÈRE LE JEU consistant à lancer N fois ($N < 6$) au plus un dé à six faces, en s'arrêtant quand on veut. On gagne un nombre de pièces égal à ce qu'indique le dernier lancer. Pour N fixé, la stratégie optimale consiste à s'arrêter au premier lancer s'il donne l'un des résultats indiqués, et sinon d'effectuer un nouveau lancer et d'appliquer la stratégie correspondant à $N - 1$ lancers [récurrence à rebours].

La démonstration de ce fait n'est pas aisée, et la liste complète des temps critiques n'est pas connue. La récurrence à rebours ne fonctionne pas pour ce problème puisqu'il n'y a *a priori* pas de fin à la séquence et donc pas de temps futur à partir duquel on puisse raisonner à reculs. Malgré des avancées très récentes de Wolfgang Stadje, de l'Université d'Osnabrück, en Allemagne, la règle optimale exacte pour toutes les séquences de faces et de piles est inconnue.

Néanmoins, le domaine général de l'arrêt optimal, en particulier avec ses applications aux marchés financiers, continue à se développer à vive allure. En fait, certains spécialistes trouvent que ce rythme a été trop rapide et que les modèles informatiques de l'évaluation des options financières et des produits dérivés sont à l'origine de l'actuelle crise économique. Mais ce n'est pas la théorie qui est en cause. Comme d'autres, j'en attribue la responsabilité à la confiance aveugle des décideurs dans les prédictions des modèles informatiques. En fait, de nouvelles idées et découvertes en matière d'arrêt optimal, y compris de meilleures estimations du risque que les modèles mathématiques soient erronés, sont exactement ce dont nous avons besoin – non seulement comme guide pour savoir quand mettre fin aux subventions, par exemple, mais aussi pour faire face à de nombreux autres problèmes cruciaux, notamment quand arrêter d'utiliser des combustibles fossiles ou de stocker des armes nucléaires. ■