

LOGIQUE & CALCUL

La répartition idéale des biens existe-t-elle ?

Différents objectifs et différentes méthodes sont utilisables pour répartir des biens ou des ressources : ils conduisent à des résultats incompatibles.

Jean-Paul DELAHAYE et Philippe MATHIEU

L'histoire de la modélisation dans les sciences humaines et en particulier en économie conduit presque invariablement à une double conclusion. 1) Il est très difficile de faire des modèles précis et exacts ; quand vous essayez, une bonne âme vous explique que vous êtes naïf en pensant représenter le réel avec la méthode retenue. 2) Concevoir des modèles et les étudier est important : on dégage des idées, on rend possibles des théorèmes et des programmes qui renforcent la compréhension et aident à prendre de meilleures décisions.

Le partage des richesses

Le partage de ressources entre les membres d'une communauté est un éternel problème humain, souvent très mal résolu. L'humanité ne cerne pas bien le but qu'elle poursuit et veut concilier des objectifs contradictoires.

Ce problème se pose quand il faut répartir les richesses disponibles entre les agents économiques, entre individus, entre groupes sociaux, entre entreprises ou institutions concurrentes, etc., mais aussi quand on doit décider comment attribuer le temps de parole, partager l'eau, l'électricité, les recettes fiscales, ou des moyens techniques entre diverses entités qui attendent chacune leur part. Améliorer l'efficacité d'un algorithme ou d'un réseau d'ordinateurs se ramène aussi bien souvent à un problème d'allocation ; c'est ce qui explique que, venant en renfort aux

économistes et aux mathématiciens, les informaticiens étudient aujourd'hui ces questions.

Examinons le problème sur un exemple simple et considérons deux entités (deux « agents ») qui doivent se partager divers biens (supposés insécables) auxquels elles accordent plus ou moins de valeur. Les agents seront notés *A* et *B*. Les biens seront notés *a*, *b*, *c* et *d*. Nous supposons qu'il n'y a qu'un exemplaire de chaque bien.

Que souhaitez-vous ?

L'agent *A* attribue autant d'importance au bien *a* et au bien *b* (utilité 10), et moins aux deux autres (utilité *c* = 3, utilité *d* = 1). L'utilité d'un bien, l'intérêt qu'on éprouve pour le bien, est ici toujours mesurée par un entier positif. Les utilités pour l'agent *B* des biens *a*, *b*, *c* et *d* sont respectivement de 2, 3, 2, et 2.

Utilités	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
Agent <i>A</i>	10	10	3	1
Agent <i>B</i>	2	3	2	2

Bien sûr, on pourra envisager d'autres exemples avec plus de deux agents et plus de quatre biens à répartir, chacun pouvant aussi exister en plusieurs exemplaires.

Pour simplifier, imaginons dans un premier temps qu'un monarque absolu décide de l'attribution des biens. Comment doit-il les distribuer au mieux ? Posez-vous la question quelques secondes, avant de lire la suite.

Votre réponse est sans doute : la meilleure allocation des biens aux agents dépend du but que le monarque poursuit. S'il veut que, globalement, la « société »

de ses deux sujets soit la plus satisfaite (recherche du bien-être social maximum), il doit trouver l'allocation des ressources qui conduit à une somme maximale d'utilités. Pour chaque allocation possible, la satisfaction d'un agent est la somme des utilités (comptées avec ses valeurs) pour les biens qui lui sont attribués. La meilleure allocation maximalise la somme des satisfactions des deux agents : *max-som*.

Rien ne dit que le but du monarque soit cette maximisation globale du total des satisfactions (point de vue *utilitariste*). Le monarque, soucieux de ne pas trop défavoriser un agent, peut rechercher l'allocation qui donne la plus grande valeur possible à la satisfaction de l'agent le moins bien servi : il cherche à maximiser le minimum des satisfactions de *A* et de *B* : *max-min*. Ce point de vue *égalitariste* évite qu'un agent soit trop mécontent. Notons cependant que cela peut être catastrophique et se faire aux dépens de l'utilité globale. Il faut choisir !

Ce choix est un problème moral et politique, pas mathématique. Hélas, l'intérêt général (utilitarisme) ne coïncide que rarement avec l'intérêt du plus pauvre (égalitarisme) comme nous le verrons plus loin.

Présentons aussi une troisième conception nommée *élitiste*. Pour l'élitiste, ce qui compte, c'est que le plus satisfait ait la satisfaction la plus grande possible : *max-max*. L'idée se défend si, par exemple, diverses entités composées de plusieurs agents doivent s'affronter et que chaque entité est représentée par le « champion » du groupe. L'intérêt du monarque sera de concentrer

LE JUGEMENT DE SALOMON



Salomon, nouveau roi des Hébreux, reçoit en songe un message de l'Éternel : « Demande ce que tu veux que je te donne. » Salomon répond : « Accorde donc à ton serviteur un cœur intelligent pour juger ton peuple, pour discerner le bien du mal ! »

Peu de temps après, se présentent devant lui deux prostituées. La première raconte les faits suivants : elles vivent ensemble, seules dans une maison et ont accouché à peu d'intervalle chacune d'un fils. Or, toujours d'après son récit, l'enfant de l'autre femme est mort car « elle s'était couchée sur lui ». Puis, elle aurait interverti les deux enfants afin de conserver pour elle l'enfant vivant.

Et les voilà demandant justice à Salomon, chacune accusant l'autre d'être la mère de l'enfant mort et réclamant pour elle l'enfant vivant. On connaît le verdict de Salomon : « Coupez en deux l'enfant qui vit, et donnez-en la moitié à l'une et la moitié à l'autre. » La vraie mère sera celle qui accepte de ne plus l'être pour qu'au moins son enfant vive : « Ah mon seigneur, donnez-lui l'enfant qui vit et ne le faites point mourir. »

Que disent les mathématiques du problème de Salomon ? Imaginons les données suivantes. Une des deux mères, *A*, alloue 20 points à l'enfant vivant avec elle, 6 points pour l'attribution de l'enfant à la mère *B*, et 5 points pour la moi-

tié de l'enfant coupé en deux. L'autre mère, *B*, attribue 13 à l'enfant vivant avec elle, 0 point pour l'attribution de l'enfant à la mère *A* et 4 points à la moitié de l'enfant coupé en deux.

Le jugement utilitariste favorisant la somme des allocations des deux agents donne l'enfant à la mère *A*, la somme des allocations étant égale à 20. Le jugement égalitariste, qui recherche l'allocation donnant la plus grande valeur possible à la mère la moins bien servie, c'est-à-dire 4, amènerait Salomon à ordonner que l'enfant soit coupé en deux... La loi de distribution de biens est affaire de choix : ici l'égalitarisme n'indique pas la solution satisfaisante.