

LE JUGEMENT DE SALOMON



© The Art Archive/Corbis

Salomon, nouveau roi des Hébreux, reçoit en songe un message de l'Éternel : « Demande ce que tu veux que je te donne. » Salomon répond : « Accorde donc à ton serviteur un cœur intelligent pour juger ton peuple, pour discerner le bien du mal ! »

Peu de temps après, se présentent devant lui deux prostituées. La première raconte les faits suivants : elles vivent ensemble, seules dans une maison et ont accouché à peu d'intervalle chacune d'un fils. Or, toujours d'après son récit, l'enfant de l'autre femme est mort car « elle s'était couchée sur lui ». Puis, elle aurait interverti les deux enfants afin de conserver pour elle l'enfant vivant.

Et les voilà demandant justice à Salomon, chacune accusant l'autre d'être la mère de l'enfant mort et réclamant pour elle l'enfant vivant. On connaît le verdict de Salomon : « Coupez en deux l'enfant qui vit, et donnez-en la moitié à l'une et la moitié à l'autre. » La vraie mère sera celle qui accepte de ne plus l'être pour qu'au moins son enfant vive : « Ah mon seigneur, donnez-lui l'enfant qui vit et ne le faites point mourir. »

Que disent les mathématiques du problème de Salomon ? Imaginons les données suivantes. Une des deux mères, *A*, alloue 20 points à l'enfant vivant avec elle, 6 points pour l'attribution de l'enfant à la mère *B*, et 5 points pour la moi-

tié de l'enfant coupé en deux. L'autre mère, *B*, attribue 13 à l'enfant vivant avec elle, 0 point pour l'attribution de l'enfant à la mère *A* et 4 points à la moitié de l'enfant coupé en deux.

Le jugement utilitariste favorisant la somme des allocations des deux agents donne l'enfant à la mère *A*, la somme des allocations étant égale à 20. Le jugement égalitariste, qui recherche l'allocation donnant la plus grande valeur possible à la mère la moins bien servie, c'est-à-dire 4, amènerait Salomon à ordonner que l'enfant soit coupé en deux... La loi de distribution de biens est affaire de choix : ici l'égalitarisme n'indique pas la solution satisfaisante.

LES AUTEURS



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).
Philippe MATHIEU est professeur à l'Université de Lille et directeur de l'équipe Systèmes multi-agents et comportements (SMAC du LIFL).

✓ BIBLIOGRAPHIE

Kenneth Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Yale University Press, 1963.

Ulrich Endriss, Nicolas Maudet, Fariba Sadri et Francesca Toni, *Negotiating socially optimal allocations of resources*, *Journal of Artificial Intelligence Research*, 25, 315-348, 2006.

Silvia Estivie, Yann Chevaieyre, Ulrich Endriss et Nicolas Maudet, *How equitable is rational negotiation ?*, *AAMAS'06*, 866-873, Japan, Hakodate, ACM Press 2006.

Tuomas Sandholm, *Contract types for satisfying task allocation : theoretical results*, *AAAI Spring Symposium : Satisfying Models*, USA, California, Stanford University, 23-25, 1998.

Antoine Nongillard, Philippe Mathieu et Brigitte Jaumard, *A multi-agent resource negotiation for the utilitarian welfare*, *ESAW'08 (Engineering Societies in the Agents World)*, et LNAI 5485, Springer-Verlag, 2009.

les richesses sur un seul agent, celui qui est le plus à même de représenter le groupe.

Un autre point de vue encore est celui qui opère un compromis entre les trois points de vue précédents. On l'appelle le point de vue *nashien*, du nom du mathématicien économiste John Nash.

Le point de vue nashien est que la meilleure allocation maximise le produit des satisfactions des agents : *max-pro*. Pour que ce produit soit grand, il ne faut pas que certains agents ne reçoivent rien (car, si un facteur est nul, le produit l'est aussi), mais aussi qu'une certaine équité soit assurée (par exemple, quand la somme s de deux nombres a et b est fixée, le maximum du produit ab est atteint pour $a = b = s/2$). Le point de vue nashien conduit à une allocation équilibrant à peu près les satisfactions des divers agents et assure que le total des satisfactions reste élevé.

Quatre allocations optimales différentes

Pour voir que les quatre objectifs possibles d'un monarque ne conduisent pas à la même allocation optimale, examinons notre exemple... que nous avons choisi pour prouver que les quatre objectifs possibles sont tous différents.

Utilités	a	b	c	d
A	10	10	3	1
B	2	3	2	2

Pour obtenir la meilleure allocation correspondant au point de vue utilitariste, on donne chaque bien à celui qui y accorde le plus d'importance et donc A se voit attribuer les biens a , b et c et B récupère d . La satisfaction de A est $10+10+3$, celle de B est 2 et donc le total, le bien-être social, vaut 25. On ne peut pas faire mieux et cette allocation optimale se note :

$\{A \{23\} : a, b, c ; B \{2\} : d\} \text{ max-som} = 25$.

Bien sûr, B se sentira mal aimé. Un monarque égalitariste et donc soucieux de faire que le moins bien loti de ses sujets reçoive le plus possible donnera le bien a à A (qui aura donc 10) et les biens b , c , d à B (qui aura donc 7). Il est impossible de faire mieux que 7 pour le minimum des agents, car pour que B ait plus que 7, il faudrait tout lui don-

ner et A se retrouverait avec 0. L'allocation égalitariste optimale est :

$\{A \{10\} : a ; B \{7\} : b, c, d\} \text{ max-min} = 7$.

Le coût du point de vue égalitariste est de 8 utilités. En effet, au lieu d'avoir un total de 25 utilités, la communauté des deux agents A et B dispose d'un total de seulement 17 utilités. Le point de vue utilitariste ne coïncide pas avec le point de vue égalitariste ; c'est décevant, et mieux vaut en avoir conscience. Malheureusement, ce n'est pas tout : le point de vue élitiste, lui encore, produit une allocation optimale différente. Il faut tout donner à A et rien à B . Il est évident que c'est la meilleure allocation pour l'élitiste, car pour maximiser ce que le meilleur possède, il faut tout lui donner. Comme ici, il est plus rentable de tout donner à A qui en tire une utilité totale de 24 que de tout donner à B qui n'en aurait tiré qu'une utilité totale de 9, le mieux est que A prenne tout. Le monarque élitiste opte donc pour :

$\{A \{24\} : a, b, c, d ; B \{0\} : \text{rien}\} \text{ max-max} = 24$.
Remarquons que, là encore, le choix élitiste engendre un coût pour la communauté formée par A et B : globalement, elle n'obtient que 24 utilités alors que 25 est possible.

Pour le point de vue nashien, la meilleure allocation est de donner les biens a et b à A et c et d à B , ce qui engendre une satisfaction de 20 pour A et de 4 pour B , et donc un produit des satisfactions de 80. On ne peut pas faire mieux pour le produit. L'allocation optimale pour le nashien est donc encore différente des trois précédentes :

$\{A \{20\} : a, b ; B \{4\} : c, d\} \text{ max-pro} = 80$.

Selon l'objectif que le monarque se fixe, quatre répartitions différentes sont les meilleures allocations ! Pour résoudre un problème d'allocation, il est nécessaire d'avoir analysé ce qu'on croit le meilleur objectif pour la communauté concernée ! Cette leçon morale et politique mériterait d'être connue de tout citoyen, car elle montre qu'il n'y a pas qu'une seule conception possible de l'intérêt général, mais plusieurs, et qu'un compromis est inévitable. La question de savoir si le point de vue nashien est le bon compromis admet probablement une réponse négative, car d'autres compromis sont envisageables, et mathématisables, conduisant à d'autres solutions optimales...