

LES AUTEURS



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL). Philippe MATHIEU est professeur à l'Université de Lille et directeur de l'équipe Systèmes multi-agents et comportements (SMAC du LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

Kenneth Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Yale University Press, 1963.

Ulrich Endriss, Nicolas Maudet, Fariba Sadri et Francesca Toni, *Negotiating socially optimal allocations of resources*, *Journal of Artificial Intelligence Research*, 25, 315-348, 2006.

Silvia Estivie, Yann Chevaieyre, Ulrich Endriss et Nicolas Maudet, *How equitable is rational negotiation ?*, *AAMAS'06*, 866-873, Japan, Hakodate, ACM Press 2006.

Tuomas Sandholm, *Contract types for satisfying task allocation : theoretical results*, *AAAI Spring Symposium : Satisfying Models*, USA, California, Stanford University, 23-25, 1998.

Antoine Nongillard, Philippe Mathieu et Brigitte Jaumard, *A multi-agent resource negotiation for the utilitarian welfare*, *ESAW'08 (Engineering Societies in the Agents World)*, et LNAI 5485, Springer-Verlag, 2009.

les richesses sur un seul agent, celui qui est le plus à même de représenter le groupe.

Un autre point de vue encore est celui qui opère un compromis entre les trois points de vue précédents. On l'appelle le point de vue *nashien*, du nom du mathématicien économiste John Nash.

Le point de vue nashien est que la meilleure allocation maximise le produit des satisfactions des agents : *max-pro*. Pour que ce produit soit grand, il ne faut pas que certains agents ne reçoivent rien (car, si un facteur est nul, le produit l'est aussi), mais aussi qu'une certaine équité soit assurée (par exemple, quand la somme s de deux nombres a et b est fixée, le maximum du produit ab est atteint pour $a = b = s/2$). Le point de vue nashien conduit à une allocation équilibrant à peu près les satisfactions des divers agents et assure que le total des satisfactions reste élevé.

Quatre allocations optimales différentes

Pour voir que les quatre objectifs possibles d'un monarque ne conduisent pas à la même allocation optimale, examinons notre exemple... que nous avons choisi pour prouver que les quatre objectifs possibles sont tous différents.

Utilités	a	b	c	d
A	10	10	3	1
B	2	3	2	2

Pour obtenir la meilleure allocation correspondant au point de vue utilitariste, on donne chaque bien à celui qui y accorde le plus d'importance et donc A se voit attribuer les biens a , b et c et B récupère d . La satisfaction de A est $10+10+3$, celle de B est 2 et donc le total, le bien-être social, vaut 25. On ne peut pas faire mieux et cette allocation optimale se note :

$\{A \{23\} : a, b, c ; B \{2\} : d\} \text{ max-som} = 25$.

Bien sûr, B se sentira mal aimé. Un monarque égalitariste et donc soucieux de faire que le moins bien loti de ses sujets reçoive le plus possible donnera le bien a à A (qui aura donc 10) et les biens b , c , d à B (qui aura donc 7). Il est impossible de faire mieux que 7 pour le minimum des agents, car pour que B ait plus que 7, il faudrait tout lui don-

ner et A se retrouverait avec 0. L'allocation égalitariste optimale est :

$\{A \{10\} : a ; B \{7\} : b, c, d\} \text{ max-min} = 7$.

Le coût du point de vue égalitariste est de 8 utilités. En effet, au lieu d'avoir un total de 25 utilités, la communauté des deux agents A et B dispose d'un total de seulement 17 utilités. Le point de vue utilitariste ne coïncide pas avec le point de vue égalitariste ; c'est décevant, et mieux vaut en avoir conscience. Malheureusement, ce n'est pas tout : le point de vue élitiste, lui encore, produit une allocation optimale différente. Il faut tout donner à A et rien à B . Il est évident que c'est la meilleure allocation pour l'élitiste, car pour maximiser ce que le meilleur possède, il faut tout lui donner. Comme ici, il est plus rentable de tout donner à A qui en tire une utilité totale de 24 que de tout donner à B qui n'en aurait tiré qu'une utilité totale de 9, le mieux est que A prenne tout. Le monarque élitiste opte donc pour :

$\{A \{24\} : a, b, c, d ; B \{0\} : \text{rien}\} \text{ max-max} = 24$. Remarquons que, là encore, le choix élitiste engendre un coût pour la communauté formée par A et B : globalement, elle n'obtient que 24 utilités alors que 25 est possible.

Pour le point de vue nashien, la meilleure allocation est de donner les biens a et b à A et c et d à B , ce qui engendre une satisfaction de 20 pour A et de 4 pour B , et donc un produit des satisfactions de 80. On ne peut pas faire mieux pour le produit. L'allocation optimale pour le nashien est donc encore différente des trois précédentes :

$\{A \{20\} : a, b ; B \{4\} : c, d\} \text{ max-pro} = 80$.

Selon l'objectif que le monarque se fixe, quatre répartitions différentes sont les meilleures allocations ! Pour résoudre un problème d'allocation, il est nécessaire d'avoir analysé ce qu'on croit le meilleur objectif pour la communauté concernée ! Cette leçon morale et politique mériterait d'être connue de tout citoyen, car elle montre qu'il n'y a pas qu'une seule conception possible de l'intérêt général, mais plusieurs, et qu'un compromis est inévitable. La question de savoir si le point de vue nashien est le bon compromis admet probablement une réponse négative, car d'autres compromis sont envisageables, et mathématisables, conduisant à d'autres solutions optimales...

Complications

S'il y a n agents et m biens à répartir, le nombre d'allocations possibles est n^m , ce qui est vite énorme. Pour 100 biens et 10 agents, cela fait 10^{100} , ce qu'on ne peut pas traiter en envisageant chaque cas : les plus gros calculs informatiques faisables aujourd'hui comportent de l'ordre de 10^{24} opérations. On utilise donc des méthodes mathématiques plus subtiles. Pour le point de vue utilitariste et le point de vue élitiste, on connaît d'excellents algorithmes rapides ; pour le point de vue égalitariste, cela devient plus difficile, et pour le point de vue nashien, on est très rapidement dans l'impossibilité de calculer en temps raisonnable la solution optimale et on doit donc se contenter de solutions approchées.

D'autres difficultés sont plus profondes et plus graves : elles naissent de l'hypothèse qu'un monarque puisse être parfaitement informé et puisse décider des attributions de chacun.

Pour rendre le modèle plus réaliste, il faut le reformuler en prenant en compte deux éléments. D'une part (a), le fait que les biens au début sont déjà dans les mains de certains agents, peut-être mal répartis, mais d'une façon qu'il faut prendre en compte. D'autre part (b), que tous les échanges ne sont pas intéressants pour les agents qui, sauf cas particuliers, ne souhaiteront pas y perdre quand évoluera l'allocation initiale.

Quels échanges peuvent souhaiter faire des agents détenteurs de biens ? Avec ces échanges acceptables, les agents réussiront-ils à construire une allocation intéressante selon un des points de vue utilitariste, égalitariste, élitiste ou nashien ?

Ne pas y perdre

Lors d'un échange de biens, personne ne souhaite perdre. Si tous les agents attribuaient les mêmes valeurs aux biens, aucun échange ne serait possible, car ce que l'un gagnerait serait perdu par l'autre. Quand les agents n'accordent pas les mêmes valeurs aux différents biens, certains échanges sont gagnants pour les deux agents.

Si j'ai des pommes et que je les aime moins que les poires, et si vous avez des

ÉCHANGES RATIONNELS ET SUITE D'ÉCHANGES



Un marché du troc au Pérou

Un échange de biens entre l'agent A et l'agent B est rationnel (l'agent A donne un de ses biens à B , et l'agent B donne en échange un de ses biens à A) si A y gagne (sa satisfaction est plus élevée après l'échange) et si B y gagne aussi.

Considérons les biens a, b, c, d, e, f et les agents A, B, C qui y attribuent les valeurs (utilités) suivantes :

Utilités	a	b	c	d	e	f
Agent A	1	2	3	9	1	1
Agent B	2	1	1	2	3	5
Agent C	3	1	1	10	5	3

On suppose que l'allocation initiale est : $\{A (10) : a, d ; B (4) : b, e ; C (4) : c, f\}$ $som = 18$.

Voici la liste complète des échanges rationnels :

- A donne a à B et B donne b à A . La satisfaction de A passe de 10 à 11, celle de B passe de 4 à 5.

- A donne a à C et C donne c à A . La satisfaction de A passe de 10 à 12, celle de C passe de 4 à 6.

- B donne e à C et C donne f à B . La satisfaction de B passe de 4 à 6, celle de C passe de 4 à 6.

Parmi les suites d'échanges rationnels, il y a les deux suivantes :

Suite d'échanges rationnels 1 :
 $[A \text{ donne } a \text{ à } B \text{ et } B \text{ donne } b \text{ à } A]$
 $[B \text{ donne } e \text{ à } C \text{ et } C \text{ donne } f \text{ à } B]$.

Cette suite conduit à l'allocation :
 $\{A (11) : b, d ; B (7) : a, f ; C (6) : c, e\}$ $som = 24$.

Suite d'échanges rationnels 2 :
 $[B \text{ donne } e \text{ à } C \text{ et } C \text{ donne } f \text{ à } B]$
 $[A \text{ donne } a \text{ à } C \text{ et } C \text{ donne } c \text{ à } A]$.

Cette suite conduit à l'allocation :

$\{A (12) : c, d ; B (6) : b, f ; C (8) : a, e\}$ $som = 26$.

Chacune de ses deux allocations finales est telle que plus aucun échange rationnel ne peut se produire (marché bloqué).

On tire de cet exemple deux conclusions.

- Une séquence d'échanges rationnels peut conduire à une allocation bloquée qui n'est pas la meilleure de celles accessibles par des suites d'échanges rationnels (c'est ce qui se passe dans le cas de la suite d'échanges 1) : laisser faire le marché ne donne pas nécessairement l'allocation optimale que le marché puisse atteindre et l'issue des échanges dépend du hasard. Dans notre exemple, le problème est lié à l'ordre des rencontres de A avec B et C : si A rencontre B et échange avec lui, il ne pourra plus échanger avec C , alors que cela aurait été plus profitable.

- La suite d'échanges rationnels qui donne le meilleur résultat possible est la suite d'échanges 2 qui conduit à une allocation dont la somme des utilités est 26. Ce n'est pas l'allocation utilitariste optimale qui ici serait : $\{A (5) : b, c ; B (5) : f ; C (18) : a, d, e\}$ $som = 28$.

L'allocation optimale utilitariste est inaccessible si on s'impose de n'opérer que des échanges rationnels. Se restreindre à des échanges rationnels interdit donc dans certains cas d'arriver à la meilleure allocation, et remet au hasard l'accès à la meilleure allocation accessible qui peut se trouver exclue elle aussi à cause d'un ordre malheureux des échanges bloquant le marché prématurément qui manque alors doublement son optimum.