

Complications

S'il y a n agents et m biens à répartir, le nombre d'allocations possibles est n^m , ce qui est vite énorme. Pour 100 biens et 10 agents, cela fait 10^{100} , ce qu'on ne peut pas traiter en envisageant chaque cas : les plus gros calculs informatiques faisables aujourd'hui comportent de l'ordre de 10^{24} opérations. On utilise donc des méthodes mathématiques plus subtiles. Pour le point de vue utilitariste et le point de vue élitiste, on connaît d'excellents algorithmes rapides ; pour le point de vue égalitariste, cela devient plus difficile, et pour le point de vue nashien, on est très rapidement dans l'impossibilité de calculer en temps raisonnable la solution optimale et on doit donc se contenter de solutions approchées.

D'autres difficultés sont plus profondes et plus graves : elles naissent de l'hypothèse qu'un monarque puisse être parfaitement informé et puisse décider des attributions de chacun.

Pour rendre le modèle plus réaliste, il faut le reformuler en prenant en compte deux éléments. D'une part (a), le fait que les biens au début sont déjà dans les mains de certains agents, peut-être mal répartis, mais d'une façon qu'il faut prendre en compte. D'autre part (b), que tous les échanges ne sont pas intéressants pour les agents qui, sauf cas particuliers, ne souhaiteront pas y perdre quand évoluera l'allocation initiale.

Quels échanges peuvent souhaiter faire des agents détenteurs de biens ? Avec ces échanges acceptables, les agents réussiront-ils à construire une allocation intéressante selon un des points de vue utilitariste, égalitariste, élitiste ou nashien ?

Ne pas y perdre

Lors d'un échange de biens, personne ne souhaite perdre. Si tous les agents attribuaient les mêmes valeurs aux biens, aucun échange ne serait possible, car ce que l'un gagnerait serait perdu par l'autre. Quand les agents n'accordent pas les mêmes valeurs aux différents biens, certains échanges sont gagnants pour les deux agents.

Si j'ai des pommes et que je les aime moins que les poires, et si vous avez des

ÉCHANGES RATIONNELS ET SUITE D'ÉCHANGES



Un marché du troc au Pérou

Un échange de biens entre l'agent A et l'agent B est rationnel (l'agent A donne un de ses biens à B , et l'agent B donne en échange un de ses biens à A) si A y gagne (sa satisfaction est plus élevée après l'échange) et si B y gagne aussi.

Considérons les biens a, b, c, d, e, f et les agents A, B, C qui y attribuent les valeurs (utilités) suivantes :

Utilités	a	b	c	d	e	f
Agent A	1	2	3	9	1	1
Agent B	2	1	1	2	3	5
Agent C	3	1	1	10	5	3

On suppose que l'allocation initiale est : $\{A (10) : a, d ; B (4) : b, e ; C (4) : c, f\}$ $som = 18$.

Voici la liste complète des échanges rationnels :

- A donne a à B et B donne b à A . La satisfaction de A passe de 10 à 11, celle de B passe de 4 à 5.

- A donne a à C et C donne c à A . La satisfaction de A passe de 10 à 12, celle de C passe de 4 à 6.

- B donne e à C et C donne f à B . La satisfaction de B passe de 4 à 6, celle de C passe de 4 à 6.

Parmi les suites d'échanges rationnels, il y a les deux suivantes :

Suite d'échanges rationnels 1 :

$[A$ donne a à B et B donne b à $A]$

$[B$ donne e à C et C donne f à $B]$.

Cette suite conduit à l'allocation :

$\{A (11) : b, d ; B (7) : a, f ; C (6) : c, e\}$ $som = 24$.

Suite d'échanges rationnels 2 :

$[B$ donne e à C et C donne f à $B]$

$[A$ donne a à C et C donne c à $A]$.

Cette suite conduit à l'allocation :

$\{A (12) : c, d ; B (6) : b, f ; C (8) : a, e\}$ $som = 26$.

Chacune de ses deux allocations finales est telle que plus aucun échange rationnel ne peut se produire (marché bloqué).

On tire de cet exemple deux conclusions.

- Une séquence d'échanges rationnels peut conduire à une allocation bloquée qui n'est pas la meilleure de celles accessibles par des suites d'échanges rationnels (c'est ce qui se passe dans le cas de la suite d'échanges 1) : laisser faire le marché ne donne pas nécessairement l'allocation optimale que le marché puisse atteindre et l'issue des échanges dépend du hasard. Dans notre exemple, le problème est lié à l'ordre des rencontres de A avec B et C : si A rencontre B et échange avec lui, il ne pourra plus échanger avec C , alors que cela aurait été plus profitable.

- La suite d'échanges rationnels qui donne le meilleur résultat possible est la suite d'échanges 2 qui conduit à une allocation dont la somme des utilités est 26. Ce n'est pas l'allocation utilitariste optimale qui ici serait : $\{A (5) : b, c ; B (5) : f ; C (18) : a, d, e\}$ $som = 28$.

L'allocation optimale utilitariste est inaccessible si on s'impose de n'opérer que des échanges rationnels. Se restreindre à des échanges rationnels interdit donc dans certains cas d'arriver à la meilleure allocation, et remet au hasard l'accès à la meilleure allocation accessible qui peut se trouver exclue elle aussi à cause d'un ordre malheureux des échanges bloquant le marché prématurément qui manque alors doublement son optimum.