

## Complications

S'il y a  $n$  agents et  $m$  biens à répartir, le nombre d'allocations possibles est  $n^m$ , ce qui est vite énorme. Pour 100 biens et 10 agents, cela fait  $10^{100}$ , ce qu'on ne peut pas traiter en envisageant chaque cas : les plus gros calculs informatiques faisables aujourd'hui comportent de l'ordre de  $10^{24}$  opérations. On utilise donc des méthodes mathématiques plus subtiles. Pour le point de vue utilitariste et le point de vue élitiste, on connaît d'excellents algorithmes rapides ; pour le point de vue égalitariste, cela devient plus difficile, et pour le point de vue nashien, on est très rapidement dans l'impossibilité de calculer en temps raisonnable la solution optimale et on doit donc se contenter de solutions approchées.

D'autres difficultés sont plus profondes et plus graves : elles naissent de l'hypothèse qu'un monarque puisse être parfaitement informé et puisse décider des attributions de chacun.

Pour rendre le modèle plus réaliste, il faut le reformuler en prenant en compte deux éléments. D'une part (a), le fait que les biens au début sont déjà dans les mains de certains agents, peut-être mal répartis, mais d'une façon qu'il faut prendre en compte. D'autre part (b), que tous les échanges ne sont pas intéressants pour les agents qui, sauf cas particuliers, ne souhaiteront pas y perdre quand évoluera l'allocation initiale.

Quels échanges peuvent souhaiter faire des agents détenteurs de biens ? Avec ces échanges acceptables, les agents réussiront-ils à construire une allocation intéressante selon un des points de vue utilitariste, égalitariste, élitiste ou nashien ?

## Ne pas y perdre

Lors d'un échange de biens, personne ne souhaite perdre. Si tous les agents attribuaient les mêmes valeurs aux biens, aucun échange ne serait possible, car ce que l'un gagnerait serait perdu par l'autre. Quand les agents n'accordent pas les mêmes valeurs aux différents biens, certains échanges sont gagnants pour les deux agents.

Si j'ai des pommes et que je les aime moins que les poires, et si vous avez des

## ÉCHANGES RATIONNELS ET SUITE D'ÉCHANGES



Un marché du troc au Pérou

Un échange de biens entre l'agent  $A$  et l'agent  $B$  est rationnel (l'agent  $A$  donne un de ses biens à  $B$ , et l'agent  $B$  donne en échange un de ses biens à  $A$ ) si  $A$  y gagne (sa satisfaction est plus élevée après l'échange) et si  $B$  y gagne aussi.

Considérons les biens  $a, b, c, d, e, f$  et les agents  $A, B, C$  qui y attribuent les valeurs (utilités) suivantes :

| Utilités  | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Agent $A$ | 1   | 2   | 3   | 9   | 1   | 1   |
| Agent $B$ | 2   | 1   | 1   | 2   | 3   | 5   |
| Agent $C$ | 3   | 1   | 1   | 10  | 5   | 3   |

On suppose que l'allocation initiale est :  $\{A (10) : a, d ; B (4) : b, e ; C (4) : c, f\}$   $som = 18$ .

Voici la liste complète des échanges rationnels :

- $A$  donne  $a$  à  $B$  et  $B$  donne  $b$  à  $A$ . La satisfaction de  $A$  passe de 10 à 11, celle de  $B$  passe de 4 à 5.

- $A$  donne  $a$  à  $C$  et  $C$  donne  $c$  à  $A$ . La satisfaction de  $A$  passe de 10 à 12, celle de  $C$  passe de 4 à 6.

- $B$  donne  $e$  à  $C$  et  $C$  donne  $f$  à  $B$ . La satisfaction de  $B$  passe de 4 à 6, celle de  $C$  passe de 4 à 6.

Parmi les suites d'échanges rationnels, il y a les deux suivantes :

Suite d'échanges rationnels 1 :  
 $[A \text{ donne } a \text{ à } B \text{ et } B \text{ donne } b \text{ à } A]$   
 $[B \text{ donne } e \text{ à } C \text{ et } C \text{ donne } f \text{ à } B]$ .

Cette suite conduit à l'allocation :  
 $\{A (11) : b, d ; B (7) : a, f ; C (6) : c, e\}$   $som = 24$ .

Suite d'échanges rationnels 2 :  
 $[B \text{ donne } e \text{ à } C \text{ et } C \text{ donne } f \text{ à } B]$   
 $[A \text{ donne } a \text{ à } C \text{ et } C \text{ donne } c \text{ à } A]$ .

Cette suite conduit à l'allocation :

$\{A (12) : c, d ; B (6) : b, f ; C (8) : a, e\}$   $som = 26$ .

Chacune de ses deux allocations finales est telle que plus aucun échange rationnel ne peut se produire (marché bloqué).

On tire de cet exemple deux conclusions.

- Une séquence d'échanges rationnels peut conduire à une allocation bloquée qui n'est pas la meilleure de celles accessibles par des suites d'échanges rationnels (c'est ce qui se passe dans le cas de la suite d'échanges 1) : laisser faire le marché ne donne pas nécessairement l'allocation optimale que le marché puisse atteindre et l'issue des échanges dépend du hasard. Dans notre exemple, le problème est lié à l'ordre des rencontres de  $A$  avec  $B$  et  $C$  : si  $A$  rencontre  $B$  et échange avec lui, il ne pourra plus échanger avec  $C$ , alors que cela aurait été plus profitable.

- La suite d'échanges rationnels qui donne le meilleur résultat possible est la suite d'échanges 2 qui conduit à une allocation dont la somme des utilités est 26. Ce n'est pas l'allocation utilitariste optimale qui ici serait :  $\{A (5) : b, c ; B (5) : f ; C (18) : a, d, e\}$   $som = 28$ .

L'allocation optimale utilitariste est inaccessible si on s'impose de n'opérer que des échanges rationnels. Se restreindre à des échanges rationnels interdit donc dans certains cas d'arriver à la meilleure allocation, et remet au hasard l'accès à la meilleure allocation accessible qui peut se trouver exclue elle aussi à cause d'un ordre malheureux des échanges bloquant le marché prématurément qui manque alors doublement son optimum.

## Échanges multiples

L'exemple suivant (où l'on adopte le point de vue utilitariste) montre que si le réseau des relations entre agents est incomplet, il peut devenir impossible d'atteindre l'allocation optimale uniquement en faisant des dons sociaux (lorsque le réseau est complet, les dons sociaux conduisent toujours à l'allocation optimale). L'exemple montre aussi qu'en autorisant des échanges rationnels quelconques (plusieurs biens contre plusieurs, pourvu que chacun y gagne), alors une suite d'échanges conduit parfois à l'allocation optimale.

On suppose trois agents *A*, *B* et *C* disposés selon le schéma :  $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C$

Les biens sont *a*, *b*, *c*, *d* et les agents y attribuent les valeurs suivantes :

| Utilités       | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> |
|----------------|----------|----------|----------|----------|
| Agent <i>A</i> | 2        | 6        | 9        | 1        |
| Agent <i>B</i> | 7        | 4        | 5        | 8        |
| Agent <i>C</i> | 3        | 10       | 4        | 2        |

On suppose que l'allocation initiale est :

$\{A(8) : a, b; B(5) : c; C(2) : d\}$  *som* = 15

L'allocation optimale est :

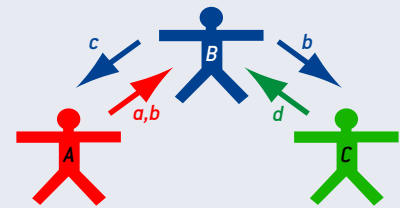
$\{A(9) : c; B(15) : a, d; C(10) : b\}$  *som* = 34

À partir de la situation de départ, même si les agents acceptent de faire des dons sociaux, on n'arrivera pas à l'allocation optimale, car *A* ne peut pas donner *b* (qui vaut 6 pour lui) à *B* (pour qui *b* ne vaut que 4).

En revanche, si les agents opèrent des échanges multiples (plusieurs biens contre un seul) et même en n'acceptant que des échanges

rationnels (chaque contractant y gagne), cette fois l'allocation optimale est atteinte en deux échanges. D'abord, *A* échange avec son voisin *B* les biens *a* et *b* contre *c* (*A* y gagne 1, *B* y gagne 6), ce qui donne :

$\{A(9) : c; B(11) : a, b; C(2) : d\}$  *som* = 22.



Ensuite *B* échange, avec son voisin *C*, *b* contre *d* (*B* y gagne 4, *C* y gagne 8), ce qui les conduit à l'optimum.

poires et que vous les aimez moins que les pommes, alors nous serons gagnants en échangeant. Tout le monde peut être gagnant dans un échange, et c'est bien pour cela qu'il y en a depuis la nuit des temps.

Un échange entre un agent *A* et un agent *B* est qualifié de *rationnel* si, comme dans l'exemple des pommes et des poires, chacun y trouve son compte. Aucune autorité régulatrice n'est nécessaire, car chacun en tire un bénéfice. Notons aussi que pour pratiquer un tel échange, chaque agent n'a besoin que de connaître ses propres utilités, aucune information globale centralisée n'est nécessaire.

Le problème économique de l'allocation, grâce à cette notion d'échange rationnel, peut mieux coller à la réalité. Partant d'une attribution de biens entre agents (fixée par des événements passés dont on ne remet pas en cause le résultat), est-il possible en opérant une suite d'échanges rationnels d'arriver à une allocation des ressources qui soit conforme au point de vue utilitariste (ou égalitariste, etc.) ? Si ce n'est pas possible, quelle est la suite d'échanges rationnels qui permet d'en approcher le plus ? Comment calculer ces suites optimales d'échanges ?

Le même problème peut être posé en imaginant des agents qui n'opèrent pas les échanges à deux, mais en se regroupant à trois ou plus. On peut aussi imaginer et étudier des agents altruistes qui acceptent, conscients que c'est l'intérêt général, d'opérer des échanges qui leur soient temporairement défavorables ou partiellement défavorables. Il est intéressant par exemple d'envisager des agents qui acceptent des échanges où ils sont perdants à la condition que glo-

balement le bien-être social augmente. Si un agent *A* possédant un bien qui pour lui vaut 5, le donne à un agent *B* pour qui le bien vaut 6, cela augmentera la valeur cumulée des utilités de 1 (et donc le bien-être social tel que le conçoit un utilitariste). Les échanges, où même si l'un des contractants est perdant, qui augmentent le bien-être social sont dénommés *échanges sociaux*. Lorsque l'échange se réduit au passage d'un seul bien d'un agent à un autre, on parle de *don social*.

## Indispensables dons sociaux

Les problèmes plus réalistes qui n'envisagent que des échanges rationnels, ou que des échanges sociaux, conduisent à des leçons intéressantes. Voici quelques-uns des résultats obtenus.

— Comme on s'y attendait, en partant d'une répartition quelconque et en n'envisageant que des échanges rationnels (à deux ou même à plus de deux), il sera rare d'arriver à la meilleure allocation utilitariste ou même conforme à un des autres points de vue. La raison en est très simple : si l'un des agents détient au départ beaucoup de biens, il n'acceptera pas de s'en séparer pour aller vers une allocation qui satisfasse un point de vue collectif (quel qu'il soit). Avec les données de notre exemple, si, au départ, tous les biens sont dans les mains de *B*, aucun échange rationnel ne sera possible, et on restera dans la situation initiale qui n'est une bonne allocation selon aucun des quatre points de vue considérés. Une société d'agents qui n'acceptent de procéder qu'à des échanges rationnels, une