

 LOGIQUE & CALCUL

Les nombres premiers insolites

Repérer les nombres premiers dotés des plus étranges propriétés est un passe-temps qui demande imagination, persévérance et savoir-faire arithmétique.

Jean-Paul DELAHAYE

L' amour des mathématiques conduit les esprits sérieux à s'attaquer à des problèmes reconnus difficiles, dont la résolution nécessite abnégation, abstraction et aptitudes hors du commun. Pour les esprits simplement amoureux des nombres et des structures combinatoires, un travail mathématique d'une autre nature et plus facile à partager avec autrui demande uniquement imagination et patience.

Les Américains Chris Caldwell et Garland Honaker viennent de publier un livre, *Prime Curios ! The Dictionary of Prime Number Trivia* (Curiosités premières. Le dictionnaire des nombres premiers futiles). Cet ouvrage est le meilleur exemple de mathématiques sans prétention, intéressantes, pratiquées pour le plaisir et l'amusement. Dans cette rubrique, en mai 2009, nous parlions des dictionnaires de nombres de toutes sortes. Ici, il s'agit d'un dictionnaire très spécialisé et purement ludique. Nous allons voir cependant

que son élaboration a exigé une créativité et une passion hors du commun.

Un nombre premier pour la nitroglycérine

Le jeu consiste à rechercher parmi les nombres premiers – ou parfois les nombres entiers ayant un rapport avec les nombres premiers – ceux qui ont un intérêt inattendu. Cet intérêt sera dû à une ou plusieurs propriétés surprenantes et simples, ou pas trop

1. Le nombre premier 313 est spécialement intéressant

Tous les nombres premiers assez petits possèdent bien sûr des propriétés particulières. Mais parmi les nombres premiers de trois chiffres, le nombre 313 est particulièrement intéressant. Voici quelques-unes de ses propriétés remarquables.

- 313 est un nombre premier palindrome (on peut le lire de droite à gauche ou de gauche à droite).
- 313 écrit en base 2 est encore un nombre palindrome : 100111001. Plus étonnant, le nombre dont l'écriture en base 10 est 100111001 est encore un nombre premier palindrome.
- $10^{313} + 313$ est encore un nombre premier.
- 313 est la somme de deux carrés consécutifs : $313 = 12^2 + 13^2$.
- Si 313 personnes sont choisies au hasard, la probabilité pour que cinq d'entre elles aient le même jour anniversaire dépasse 50 %, et 313 est le plus petit nombre ayant cette propriété.



- 313 est le plus petit nombre « faiblement premier » en base 5 : écrit en base 5, si vous changez un seul de ses chiffres, vous obtenez toujours un nombre composé.
- 313 est le numéro de la plaque d'immatriculation de Donald depuis 1938 quand il apparaît dans les dessins de Walt Disney.
- En intervertissant les 1 et les 3 dans 313, ce qui donne 131, on obtient un autre nombre premier palindrome.
- L'équation $313(x^3 + y^3) = z^3$ est une équation remarquable, car ses plus petites solutions en nombres entiers comportent plus de 1 000 chiffres.
- 313 est le septième nombre premier dont la somme des chiffres est 7.
- $1/313$ donne une suite de chiffres décimaux qui ne se répète que lorsque l'on arrive à la 313^e décimale.
- D'autres propriétés sur : <http://primes.utm.edu/curios/page.php?short=313>

compliquées, qui montrent à l'évidence que le nombre sélectionné mérite d'être connu et mis en valeur... du moins pour tous ceux qui ont le goût de l'étrangeté mathématique. Voici d'abord six exemples.

- 987 654 103 mérite une attention particulière, car c'est le plus grand nombre premier dont tous les chiffres sont différents.
- 3 539 est un premier remarquable, car $C_3H_5N_3O_9$ est la formule de la nitroglycérine.
- 21 322 319 est le plus petit nombre premier autodescriptif : quand on en compte les chiffres, cela le reconstitue, car il comporte deux « 1 », trois « 2 », deux « 3 » et un « 9 ».
- 85 837 vérifie l'égalité : $85837 = 8! + 5! + 8! + 3! + 7! + (8 + 5 + 8 + 3 + 7)$; c'est le seul nombre premier possédant cette propriété.
- 43 252 003 274 489 855 999 est le nombre de configurations dérangées du cube de Rubik et c'est le nombre premier préféré de G. Honaker. Avec la position rangée du cube, cela fait 43 252 003 274 489 856 000 configurations possibles au total.
- 905 est un entier intéressant. En effet, la plupart des nombres impairs s'écrivent comme la somme d'un nombre premier et

d'une puissance de 2 : $3 = 2 + 1$, $5 = 3 + 2$, $7 = 3 + 4$, $9 = 7 + 2$, $11 = 7 + 4$, $13 = 5 + 8$, $15 = 7 + 8$, $17 = 13 + 4$, $19 = 3 + 16$, $21 = 5 + 16$, etc. Les exceptions, dénommées parfois *nombre obstinés*, sont en nombre infini, mais ont une faible densité. L'entier 905 est le plus petit nombre obstiné composé.

Le fruit d'un travail collaboratif

Le dictionnaire n'est pas le résultat du travail de deux auteurs seulement et se fonde sur les richesses patiemment accumulées du site Internet *Prime Curios* : <http://primes.utm.edu/curios/>

Toute une communauté d'amateurs depuis des années enrichit la collection de ce site auquel tout le monde peut contribuer. Le dictionnaire qui vient d'être publié est composé d'une sélection opérée en 2009 des meilleures trouvailles du site. Il est destiné à être emmené avec soi, en métro, dans la salle d'attente de votre médecin, sur la plage ou pour faire la queue à la poste. Un paragraphe à la fois, vous en dégusterez au hasard les meilleures définitions. Sur votre lieu de travail... vous pourrez discrè-

tement poursuivre l'exploration en vous connectant au site Internet où vous utiliserez la fonction *random* de la page principale qui vous fera découvrir les nombres et définitions qui enrichissent chaque jour la base de données *Prime Curios*.

Peut-être voudrez-vous être l'un des collaborateurs du site et voir votre nombre premier personnel donner naissance à une nouvelle page où votre nom apparaîtra. Pour cela, il faut imaginer une définition nouvelle qui n'exige pas plus de 100 caractères, à laquelle correspondra un nombre en rapport avec les nombres premiers. Il faut bien sûr que personne n'ait proposé la même curiosité avant vous.

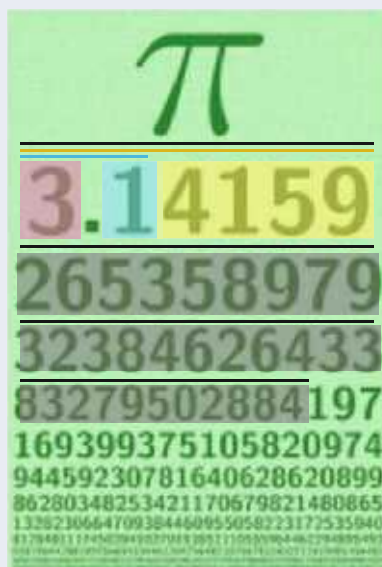
Chaque responsable du site (et auteurs du livre) a son propre rôle. G. Honaker est l'éditeur de contenu et c'est lui qui est à l'origine de cette collection commencée il y a une quinzaine d'années. Il décide de l'acceptation d'une proposition nouvelle et rédige les pages avec les définitions. Ch. Caldwell joue le rôle d'éditeur technique. Il gère les aspects informatiques du site et en particulier la mise en page des données, les programmes qui engendrent les index et les sauvegardes.

2. Quelques différents types de nombres premiers

A. Les **bons nombres premiers** : par définition, ils doivent être strictement supérieurs à la moyenne géométrique du nombre premier qui les précède et du nombre premier qui les suit : $(p_n)^2 > p_{n-1} p_{n+1}$. Voici la liste : 5, 11, 17, 29, 37, 41, 53, 59, 67, 71, 97, 101, 127, 149, 179, 191, 223, 227, 251, 257, 269, 307, 311, 331, 347, 419, 431, 541, 557, 563, 569, 587, 593, 599, 641, 727, ...

B. Les **nombres premiers de Fibonacci** sont bien sûr les nombres de la suite de Fibonacci ($F(0) = 1$, $F(1) = 1$, $F(n+2) = F(n) + F(n+1)$ pour $n > 1$) qui sont, en outre, premiers.
2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, 28657, 514229, 433494437, 2971215073, 99194853094755497, 1066340417491710595814572169, 1913470240093278081449423917...

C. Les **π -nombres premiers** qui sont les nombres premiers qu'on trouve quand on considère les n premières décimales du nombre



$\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\dots$ On en connaît aujourd'hui sept (**nous donnons les premiers**) correspondant à $n = 1$ (3), 2 (31), 6 (314159), 38, 16208, 47577, 78073. Celui correspondant à 78073 a été trouvé en 2006.

D. Les **nombres premiers factoriels** : ce sont ceux de la forme $n! + 1$ ou $n! - 1$.

Ceux de la forme $n! - 1$ correspondent aux valeurs de n suivantes : 3, 4, 6, 7, 12, 14, 30, 32, 33, 38, 94, 166, 324, 379, 469, 546, 974, 1963, 3507, 3610, 6917, 21480, 34790.

Ceux de la forme $n! + 1$ correspondent aux valeurs de n suivantes : 0, 1, 2, 3, 11, 27, 37, 41, 73, 77, 116, 154, 320, 340, 399, 427, 872, 1477, 6380, 26951. On n'en connaît pas d'autres, car la fonction factorielle croît très vite et il devient difficile, voire impossible, de tester la primalité des nombres engendrés par les expressions $n! - 1$ et $n! + 1$.