

3. Quelques nombres premiers curieux

1 025 327

Le plus petit *reimerp* (nombre aussi premier quand on inverse l'ordre de ses chiffres), qui ne contient que des chiffres premiers et les contient tous.

37 330 116 097

En partant de 37 330 116 097 et en additionnant les deux nombres premiers qui suivent (ce qui fait une somme de trois nombres premiers), on obtient un nouveau nombre premier 111 990 348 347.

En partant de ce nombre et en additionnant les quatre nombres premiers qui suivent (ce qui en fait cinq consécutifs), on obtient un nouveau nombre premier.

En poursuivant de la même façon, on obtient toujours des nombres premiers, jusqu'à une somme de 19 nombres premiers.

122 334 444 555 553

Le plus petit nombre premier contenant un « 1 », deux « 2 », trois « 3 », quatre « 4 », cinq « 5 ».

7 469 789

Le premier nombre d'une paire de nombres premiers consécutifs qui sont tous les deux faiblement premiers (un nombre est faiblement premier si, en changeant l'un de ses chiffres par un autre, on tombe toujours sur un nombre composé).

7 284 717 174 827

Ce nombre premier palindrome (il peut se lire de droite à gauche ou de gauche à droite) donne encore

un nombre palindrome si on l'écrit en base 2 : 1101010000000011010111101011000000101011. De plus, sa longueur en base 10, qui est 13, et la longueur de son écriture en base 2, qui est 43, sont tous les deux des nombres premiers.

14 444 999 999 999

Nombre premier qui est la mise bout à bout des chiffres qui sont des carrés non nuls (1, 4, 9) répétés autant de fois que leur valeur.

1 311 753 223 571 113

Ce nombre premier est obtenu comme la concaténation des nombres premiers de 13 à 2 par ordre décroissant, suivie de la concaténation des mêmes nombres par ordre croissant 13, 11, 7, 5, 3, 2, 2, 3, 5, 7, 11, 13. Ce qui donne une sorte de palindrome.

37 104 124

Ce n'est pas un nombre premier, mais il est très intéressant, car 37 104 124 est égal à la somme de $3! \times 7! \times 1! \times 0! \times 4! \times 1! \times 2! \times 4!$ et du nombre de nombres premiers plus petits que 37 104 124. C'est le seul nombre connu ayant cette propriété.

172 909 271

Le plus petit nombre premier palindrome qui contienne le célèbre nombre de Ramanujan 1 729 (le plus petit nombre représentable de deux façons comme somme de deux cubes $1\,729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$).

15 618 090

Égal à $2 \times 3 \times 5 \times 487 \times 1\,069$, il n'est pas premier, mais c'est le plus petit entier dont la décomposition en facteurs premiers utilise chacun des dix chiffres une fois et une seule.

1 873

C'est en 1873 que Charles Hermite démontra que le nombre e était un nombre transcendant.

3 778 888 999

Le plus petit nombre premier ayant une persistance multiplicative de 10. La persistance multiplicative d'un nombre est le nombre d'étapes avant stabilisation qu'il faut faire quand on le remplace par le produit de ses chiffres.

Ainsi $721 \rightarrow 14 \rightarrow 4 \rightarrow 4$, donc 721 a une persistance multiplicative de 3.

16 719

Le 16719^e siècle sera le premier siècle n'ayant aucune année égale à un nombre premier.

619 737 131 179

Le plus grand nombre tel que deux chiffres consécutifs donnent toujours un nombre premier et tel que tous les nombres premiers ainsi obtenus soient différents.

1000...00081918000...0001

(1001 chiffres en tout). Le plus petit nombre premier palindromique de plus de 1 000 chiffres.

Sans Internet qui permet un travail collaboratif remarquable, cette collection n'aurait pas acquis sa richesse actuelle. L'informatique et l'existence des réseaux conduisent au développement de nouvelles formes d'activités et de savoirs mathématiques. Le 29 juin 2010, il y avait 10 277 curiosités singularisant 7 193 nombres différents (des curiosités différentes donnent parfois le même nombre). Comme le disent les auteurs, cela laisse une place infinie à vos propres découvertes.

Bien sûr, la fameuse astuce du paradoxe de Bechembach s'applique au site : tout nombre mérite d'être présent dans la base de *Prime Curios*, le plus petit nombre qui n'y est pas étant intéressant parce qu'il pos-

sède la propriété de ne pas y être... et donc doit y être. Mais c'est une boutade et puisque ce plus petit nombre qui n'y est pas change au cours du temps, Ch. Caldwell et G. Hona-ker ont simplement choisi de considérer qu'il ne s'agit pas d'un nombre curieux et de ne pas l'y mettre : le paradoxe est contourné.

Plus de 7 000 nombres premiers différents

L'avantage du site est qu'on y trouve aussi un algorithme qui teste la primalité : <http://primes.utm.edu/curios/includes/primetest.php>. Pour la factorisation des nombres entiers, nous vous recommandons <http://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM>, qui

est remarquablement efficace et rapide. Cet algorithme vous permettra de tester vos idées et vous aidera à mener vos recherches dans le but de proposer un nombre premier intéressant. Le dictionnaire ou le site Internet seront utiles aux amateurs de programmation et aux enseignants à la recherche d'exercices informatiques nouveaux et parfois non triviaux.

Voici trois exemples d'exercices de programmation directement tirés du dictionnaire.

- Faire un programme qui trouve le plus petit nombre premier p tel que p et le nombre premier p' qui le suit soient composés uniquement de chiffres qui sont des cubes $\{0, 1, 8\}$. La réponse est 100 801, qui est suivi par le nombre premier 100 811.

• Trouver le nombre premier p_1 qui commence une suite de six nombres premiers consécutifs $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, chacun d'eux ayant pour somme de ses chiffres le même entier qui doit être un nombre premier.

La réponse est 354 963 229, dont la somme des chiffres est 43, et qui est suivi par les cinq nombres premiers : 354 963 283, 354 963 319, 354 963 337, 354 963 373, 354 963 391, dont la somme des chiffres est à chaque fois 43.

• Trouver le plus petit nombre entier ne se terminant pas par des zéros et qui peut s'écrire comme la somme du carré de deux nombres premiers distincts de quatre façons différentes.

La réponse est 39 338, qui s'écrit :
 $39\,338 = 23^2 + 197^2 = 97^2 + 173^2 = 107^2 + 167^2 = 113^2 + 163^2$.

Démonstration automatique

Si on y réfléchit un peu, on est amené à conclure que le dictionnaire doit être considéré comme une immense collection de théorèmes mathématiques donnés sans démonstration. Dans la plupart des cas, un ordinateur et un programme sont nécessaires pour contrôler la justesse des affirmations proposées, car une démonstration directe avec un papier et un crayon est impossible ou demanderait bien trop de temps et de patience.

Le dictionnaire et le site Internet peuvent donc être vus aussi comme des collections d'énoncés arithmétiques non démontrables par le mathématicien seul, qui est contraint de s'adjoindre une machine pour explorer ce type de vérités mathématiques. Il s'agit d'une base de résultats mathématiques démontrés par ordinateur et non démontrables humainement.

L'informatique est donc utile pour ce dictionnaire pas uniquement pour coordonner le travail entre amateurs et organiser la base de données des résultats ; elle joue aussi un rôle central dans la recherche, la preuve et le contrôle de chacune des milliers de propriétés sélectionnées. Les rapports entre mathématiques et informatique

sont de plus en plus resserrés et c'est aussi vrai dans le domaine des mathématiques récréatives.

Le tableau d'honneur des plus prolifiques producteurs de nombres premiers curieux indique la liste de neuf noms d'amateurs ayant proposé chacun plus de 200 entrées. Le contributeur classé premier est Shyam Sunder Gupta, qui est à l'origine de 606 entrées du dictionnaire. Il est suivi de Jonathan Vos Post, à qui l'on doit 519 entrées. Il faut admirer la quantité de travail de programmation, la patience et l'inventivité extrême exigées pour arriver à de tels résultats.

Exécutable et illégal ?

Parmi les curiosités les plus troublantes, il y a celle des *nombres premiers exécutables*. Un nombre premier peut toujours être écrit en base 2, auquel cas il représentera parfois un programme informatique pour un type particulier de machines.

Les microprocesseurs les plus courants ayant des instructions d'un octet (8 bits) sont ceux de la série x86. La plus petite instruction est alors celle associée au nombre 195 qui exécute l'instruction RET (*return*). Cet octet peut être écrit dans un fichier de type .com et constituera alors un programme exécutable pour les machines DOS (*Windows*). Malheureusement, 195 n'est pas un nombre premier.

Selon Phil Carmody, qui a étudié le problème de près, les trois plus petits nombres premiers exécutables sont :
 $38 \times 256 + 195 = 9\,923$, $46 \times 256 + 195 = 11\,971$, $47 \times 256 + 195 = 12\,227$, qui ne font rien de très intéressant, mais sont d'authentiques programmes !

Le premier nombre premier exécutable réalisant quelque chose d'intéressant (avec les mêmes règles du jeu que précédemment) est un nombre de 1 811 chiffres décimaux qui commence par : 4 931 083 597 028 501 900 27 577 672 390 764 957 284 907 721 502 0 (voir http://primes.utm.edu/curios/page.php?number_id=1214 pour la liste complète des chiffres).

Ce nombre retranscrit en binaire est équivalent à un petit programme écrit par Charles Hannum qui implémente DeCSS, un

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

Ch. Caldwell, *The Prime Pages* (records, listes diverses, etc.), <http://primes.utm.edu/>

Ch. Caldwell et G. L. Honaker, *Prime Curios !* : <http://primes.utm.edu/curios/>

Chr. Caldwell et G. L. Honaker, *Prime Curios ! The Dictionary of Prime Number Trivia*, BookSurge, 2009.

J.-P. Delahaye, *Mille collections de nombres, Pour la Science*, n°379, pp. 88-93, mai 2009.

J.-P. Delahaye, *Merveilleux nombres premiers*, Pour la Science/Belin, 2010.

J. Moyer, *Some Prime Numbers* (page pour obtenir des listes de nombres premiers et des programmes pour les calculer) : <http://www.rsok.com/ffjrm/printprimes.html>

Wikipedia, *List of prime numbers* (des catégories particulières de nombres premiers) : http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_prime_numbers

Wikipedia, *Primality test* (informations et liens sur les tests de primalité) : http://en.wikipedia.org/wiki/Primality_test

© Pour la Science - n° 396 - Octobre 2010