4. Nombres premiers étoilés

Parmi les nombres premiers remarquables, certains ont une structure particulière immédiatement visible, comme les palindromes. Mais il y a beaucoup mieux et plus esthétique encore : les nombres premiers étoilés.

Quand on dispose les chiffres d'un tel nombre ligne par ligne selon le modèle d'une étoile à six branches, les chiffres se placent de façon parfaitement symétrique. Si le nombre utilise *n* chiffres différents, on dit que c'est un nombre premier étoilé d'ordre *n*.

Voici quelques exemples de ces beautés premières et magiques :

```
      1
    1 1 1 1
     1 8 1
    1 1 1 1
      1
```

Le plus petit nombre premier étoilé d'ordre 2.

```
        1
      1 1
  1 1 1 4 1 1 1
   1 4 4 4 4 1
     1 4 2 4 1
   1 4 4 4 4 1
  1 1 1 4 1 1 1
      1 1
        1
```

Le plus petit nombre premier étoilé d'ordre 3

```
            1
          1 1
        1 0 1
      1 0 0 1
  1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1
  1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
    1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 1
      1 0 0 2 2 2 2 0 0 1
        1 0 0 2 7 2 0 0 1
      1 0 0 2 2 2 2 0 0 1
    1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 1
  1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
  1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1
        1 0 0 1
          1 0 1
            1 1
              1
```

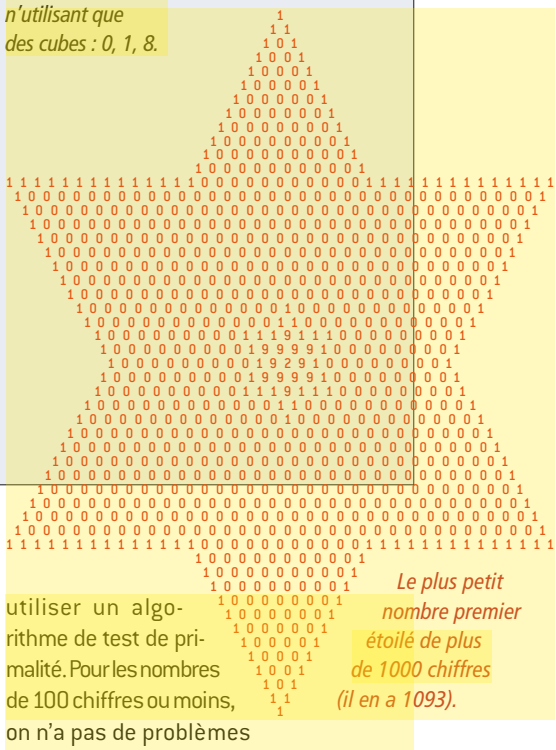
Le plus petit nombre premier étoilé supérieur à un gogol (10^{100}).

```
            7
          7 7
        7 2 7
      7 2 2 7
  7 7 7 7 7 2 3 2 7 7 7 7 7
  7 2 2 2 2 2 3 3 2 2 2 2 7
    7 2 3 3 3 5 3 3 3 2 7
      7 2 3 5 5 5 5 3 2 7
        7 2 3 5 2 5 3 2 7
      7 2 3 5 5 5 5 3 2 7
    7 2 3 3 3 5 3 3 3 2 7
  7 2 2 2 2 2 3 3 2 2 2 2 7
  7 7 7 7 7 2 3 2 7 7 7 7 7
        7 2 2 7
          7 2 7
            7 7
              7
```

Le plus petit nombre premier étoilé utilisant tous les chiffres premiers (2, 3, 5, 7)

```
            1
          1 1
        1 0 1
      1 1 1 1 0 0 1 1 1 1
    1 0 0 0 8 0 0 0 1
      1 0 8 8 8 8 0 1
        1 0 8 1 8 0 1
      1 0 8 8 8 8 0 1
    1 0 0 0 8 0 0 0 1
  1 1 1 1 0 0 1 1 1 1
        1 0 1
          1 1
            1
```

Un nombre premier étoilé d'ordre 3 n'utilisant que des cubes : 0, 1, 8.



Le plus petit nombre premier étoilé de plus de 1000 chiffres (il en a 1093).

programme déchiffrant les DVD contenant de la vidéo utilisant le système CSS *(Content Scrambling System)*. Fondé sur le même type d'idées, un nombre premier de 914 chiffres décimaux a été créé qui permet d'obtenir un programme interdit à la diffusion.

Ce serait en quelque sorte un nombre premier illégal. Notons cependant que ce nombre est présent sur le site *Prime Curios* qui n'a jamais été ennuyé par sa publication, et il n'est donc pas vraiment très dangereux de le faire circuler !

En revanche, en poursuivant la même idée, on pourrait certainement créer un nombre premier conduisant ceux qui le publient à de véritables poursuites correctionnelles. Il suffirait par exemple d'écrire un court texte insultant le président de la République ou constituant une incitation à la haine raciale. Ce texte serait alors traduit en chiffres binaires en utilisant le codage ASCII. Le nombre obtenu ne serait sans doute pas premier, mais en le faisant suivre de quelques chiffres supplémentaires recherchés en procédant systématiquement, on découvrirait un nombre premier qui, pour le coup, serait vraiment illégal. Cette recherche aboutirait avec certitude : on sait, grâce à un théorème de Waclau Sierpinski, que quelle que soit la suite *s* de chiffres, il existe un nombre premier qui commence par *s*.

Votre nom dans un nombre premier ?

Vous pouvez aussi, en utilisant le même procédé, rechercher un nombre premier qui commence par le codage de votre nom, ou par un poème que vous aimez particulièrement. La seule limite que vous rencontrerez pour mener ces recherches de nombres premiers est celle de la taille. Puisque la méthode procède par tâtonnements, pour la faire fonctionner, vous devez utiliser un algorithme de test de primalité. Pour les nombres de 100 chiffres ou moins, on n'a pas de problèmes majeurs. En revanche, pour les nombres plus longs, il faut se satisfaire d'algorithmes probabilistes qui, lorsqu'ils indiquent qu'un nombre est premier, ne le font qu'avec une certaine probabilité d'erreur qu'on peut rendre très petite, mais qu'on ne peut pas annuler.

Les jeux avec les nombres premiers offrent encore de nombreuses possibilités... Si l'on vous ennuie parce que vous y passez trop de temps, citez Nikolaï Lobatchevski : « Il n'existe pas un domaine des mathématiques, quelle que soit son abstraction, qui ne soit susceptible d'être un jour appliqué au monde réel. » ■

© Pour la Science - n° 396 - Octobre 2010