

LOGIQUE & CALCUL

L'ensemble de tous les ensembles

L'ensemble de tous les ensembles est généralement considéré comme un concept contradictoire. Il s'agit là d'une erreur, parmi les plus répandues au sujet des ensembles, que les logiciens dénoncent.

Jean-Paul DELAHAYE

En histoire des sciences, on a souvent du mal à comprendre comment les solutions aujourd'hui adoptées ont été si difficiles à trouver et à mettre au point, tant les consensus élaborés par nos illustres prédécesseurs nous semblent parfois faciles. C'est le cas pour la théorie des ensembles, dont on n'imagine plus se passer et dont la naissance fut pourtant un douloureux moment de l'histoire des mathématiques. Au début du XX^e siècle, on pensa à y renoncer à cause des paradoxes qu'on y avait décelés. Lorsqu'une solution fut trouvée, celle qu'on nomme aujourd'hui ZFC, l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix, la communauté mathématique fut rassurée ; depuis bientôt un

siècle, la théorie ZFC, qui sert de support à pratiquement tout ce qui se fait en mathématiques, est universellement perçue comme simple et naturelle.

Pour éviter les paradoxes, ZFC impose quelques contraintes qui sont devenues des vérités mathématiques absolues : il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles, un ensemble ne peut pas être élément de lui-même, il n'y a pas d'ensemble de tous les ordinaux, ni d'ensemble de tous les cardinaux, etc. Or ces affirmations catégoriques sont inutiles et trompeuses ! En effet, des théories alternatives des ensembles nous autorisent à traiter, sans rencontrer de paradoxe, de l'ensemble de tous les ensembles, d'ensembles qui sont éléments d'eux-mêmes, etc. Méfions-nous des véri-

tés définitives que l'habitude et la paresse nous font adopter et qui ne sont que des conventions liées au choix d'une solution particulière favorisée par l'histoire.

Les paradoxes ensemblistes

Alors que la théorie des ensembles entrevue par le mathématicien Bernard Bolzano au début du XIX^e siècle et développée par Georg Cantor à partir de 1873 commençait à s'imposer comme la théorie de base des mathématiques, le logicien et philosophe anglais Bertrand Russell publia en 1903 ce que l'on dénomme aujourd'hui l'antimétrie de Russell (voir la figure 2) et qui est une contradiction en plein cœur de la théo-

1. L'ensemble de tous les ensembles



Le fondateur de la théorie des ensembles, Georg Cantor (*ci-contre*) démontra (ce qui était vrai à l'époque, les axiomes fondateurs étant mal précisés) que l'on ne peut envisager l'ensemble de tous les ensembles. Il prouva en effet que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E , fini ou infini, est toujours « plus gros » que cet ensemble. Ainsi, l'ensemble de tous les ensembles n'est pas l'ensemble le plus gros.

Cela ne signifie pas seulement que l'ensemble des parties « paraît »

avoir plus d'éléments. Ainsi, l'ensemble infini des nombres entiers paraît plus gros que l'ensemble infini des nombres pairs, alors qu'il existe une bijection entre les entiers et les entiers pairs, obtenue en doublant chaque entier. On dit que ces deux ensembles ont la même taille (même cardinal).

On démontre facilement que l'ensemble des parties d'un ensemble fini à K éléments a 2^K parties. Ce résultat a été généralisé par Cantor à des ensembles infinis : l'en-

semble des parties d'un ensemble (fini ou non) a une cardinalité strictement supérieure à celle de l'ensemble de départ. Il n'y a donc pas de plus grand cardinal qui serait celui de l'ensemble de tous les ensembles.

Tout ensemble qui peut-être mis en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est dit dénombrable. Le théorème de Cantor montre en particulier que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable et l'on ne peut « numérotter » de façon exhaustive les sous-ensembles de $\mathbb{N}$.

rie de Cantor. Le raisonnement est le même que celui fait à propos du barbier qui ne rase que tous les habitants de sa ville qui ne se rasent pas eux-mêmes. S'il se rase lui-même, alors c'est qu'il ne se rase pas ; s'il ne se rase pas lui-même, alors il possède la propriété qui fait qu'il doit se raser, et donc il se rase lui-même.

Le choc produit par l'antinomie de Russell fut très grave. Il ébranla par exemple l'Allemand Richard Dedekind qui cessa un moment de publier ses travaux sur la théorie des nombres. Le philosophe allemand Gottlob Frege prit connaissance de l'antinomie de Russell en mettant la dernière main à son ouvrage sur les fondements de l'arithmétique. Il y ajouta une note exprimant son désarroi : « Un scientifique peut difficilement être confronté à une situation plus désagréable que celle de voir les bases de son travail disparaître au moment précis où il s'achève. J'ai été mis dans cette situation par une lettre de Bertrand Russell alors que le livre était pratiquement sous presse. »

Plusieurs mathématiciens considérèrent qu'il fallait abandonner la théorie des ensembles. En fait, la raison de l'inquiétude ne venait pas seulement du paradoxe de Russell, mais d'une série d'autres. Le premier paradoxe découvert en théorie des ensembles est en réalité celui de Cesare Burali-Forti paru en 1897. Il envisage l'ensemble de tous les ordinaux (un ordinal est

un ensemble ordonné tel que toute partie possède un plus petit élément). Cet ensemble, s'il existe, définit un nouvel ordinal dont on montre qu'il est strictement plus grand que tous les ordinaux utilisés pour le définir, ce qui est absurde. L'ensemble de tous les cardinaux (nombres qui servent à mesurer la taille, finie ou infinie, des ensembles) est sujet à la même difficulté.

Ces paradoxes techniques gênent le mathématicien, mais le paradoxe le plus grave est sans doute le paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles (voir la figure 1) que Cantor connaissait sans doute dès 1899. Il se déduit d'un théorème général démontré par Cantor qui indique que l'ensemble $\mathcal{P}[E]$ des parties d'un ensemble E est toujours plus gros que l'ensemble E lui-même. Il existe ainsi un ensemble de « puissance » supérieure à celle de tout ensemble E donné : c'est l'ensemble des sous-ensembles de E . Appliqué à l'ensemble de tous les ensembles, le théorème de Cantor conduit à l'idée que celui-ci, puisqu'il contient toutes ses parties, est strictement plus gros que lui-même, ce qui est aussi absurde que $1 > 1$.

Retomber sur ses pieds, c'est-à-dire éliminer les paradoxes, nécessite de les analyser et de modifier la façon dont nous raisonnons, de façon à ce qu'ils ne puissent plus survenir.

La résolution des paradoxes ensemblistes donna lieu à de nombreux travaux,

dont ceux de Russell lui-même, qui constituent ce qu'on nomme la théorie des types et sur laquelle nous reviendrons.

La solution qui est adoptée aujourd'hui par les mathématiciens, ZFC, provient d'une axiomatisation de la théorie des ensembles proposée par Ernst Zermelo en 1908 et complétée dans les années 1920 par Abraham Fraenkel et John von Neumann. L'idée de cette solution est que seuls certains regroupements d'objets doivent être acceptés comme ensembles, mais pas tous. Il ne suffit pas de disposer d'une propriété, par exemple « l'ensemble x n'est pas élément de lui-même » pour avoir le droit de parler de l'ensemble des objets vérifiant la propriété, il faut être plus restrictif.

La théorie classique des ensembles : ZFC

La théorie ZFC soutient donc que certains regroupements définis par une propriété sont trop gros, et que seuls les regroupements soigneusement et progressivement construits comme nous l'expliquons plus loin sont des ensembles. La méthode se dénomme théorie de la limitation de taille.

Examinons les axiomes de ZFC pour voir comment s'effectue l'élimination des paradoxes. Le premier axiome indique, conformément au bon sens, que deux ensembles sont identiques si et seulement s'ils ont les mêmes éléments : un ensemble est

2. Les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes

L'antinomie de Bertrand Russell (photographie à droite) fut un tel choc qu'elle conduisit certains logiciens et mathématiciens, tel Dedekind, à abandonner temporairement la théorie des ensembles.

Russell distingue deux types d'ensembles, les ensembles qui sont un élément d'eux-mêmes (comme l'ensemble des idées, qui est une idée) et les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes (comme l'ensemble des éléphants, qui n'est pas un éléphant).

Le paradoxe consiste à raisonner de la manière suivante. Considérons l'ensemble E des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. Deux cas sont à envisager : E est élément de lui-même ou ne l'est pas.

— Si E n'est pas élément de lui-même, alors il possède la propriété caractéristique des éléments de E et il est donc dans E . Mais alors, E est élément de lui-même. C'est une contradiction !

— Si E est élément de lui-même, alors il n'a pas la propriété caractéristique des éléments de E (ne pas être élément d'eux-mêmes), ce qui implique que E ne peut pas être élément de lui-même. C'est, à nouveau, une contradiction.

Le catalogue de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas eux-mêmes conduit pareillement à une contradiction. S'il se mentionne lui-même, il n'est pas dans ce catalogue, mais s'il n'est pas dans le catalogue, alors c'est un catalogue qui ne se mentionne pas lui-même et il devrait y être.

