

rie de Cantor. Le raisonnement est le même que celui fait à propos du barbier qui ne rase que tous les habitants de sa ville qui ne se rasent pas eux-mêmes. S'il se rase lui-même, alors c'est qu'il ne se rase pas ; s'il ne se rase pas lui-même, alors il possède la propriété qui fait qu'il doit se raser, et donc il se rase lui-même.

Le choc produit par l'antinomie de Russell fut très grave. Il ébranla par exemple l'Allemand Richard Dedekind qui cessa un moment de publier ses travaux sur la théorie des nombres. Le philosophe allemand Gottlob Frege prit connaissance de l'antinomie de Russell en mettant la dernière main à son ouvrage sur les fondements de l'arithmétique. Il y ajouta une note exprimant son désarroi : « Un scientifique peut difficilement être confronté à une situation plus désagréable que celle de voir les bases de son travail disparaître au moment précis où il s'achève. J'ai été mis dans cette situation par une lettre de Bertrand Russell alors que le livre était pratiquement sous presse. »

Plusieurs mathématiciens considérèrent qu'il fallait abandonner la théorie des ensembles. En fait, la raison de l'inquiétude ne venait pas seulement du paradoxe de Russell, mais d'une série d'autres. Le premier paradoxe découvert en théorie des ensembles est en réalité celui de Cesare Burali-Forti paru en 1897. Il envisage l'ensemble de tous les ordinaux (un ordinal est

un ensemble ordonné tel que toute partie possède un plus petit élément). Cet ensemble, s'il existe, définit un nouvel ordinal dont on montre qu'il est strictement plus grand que tous les ordinaux utilisés pour le définir, ce qui est absurde. L'ensemble de tous les cardinaux (nombres qui servent à mesurer la taille, finie ou infinie, des ensembles) est sujet à la même difficulté.

Ces paradoxes techniques gênent le mathématicien, mais le paradoxe le plus grave est sans doute le paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles (voir la figure 1) que Cantor connaissait sans doute dès 1899. Il se déduit d'un théorème général démontré par Cantor qui indique que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E est toujours plus gros que l'ensemble E lui-même. Il existe ainsi un ensemble de « puissance » supérieure à celle de tout ensemble E donné : c'est l'ensemble des sous-ensembles de E . Appliqué à l'ensemble de tous les ensembles, le théorème de Cantor conduit à l'idée que celui-ci, puisqu'il contient toutes ses parties, est strictement plus gros que lui-même, ce qui est aussi absurde que $1 > 1$.

Retomber sur ses pieds, c'est-à-dire éliminer les paradoxes, nécessite de les analyser et de modifier la façon dont nous raisonnons, de façon à ce qu'ils ne puissent plus survenir.

La résolution des paradoxes ensemblistes donna lieu à de nombreux travaux,

dont ceux de Russell lui-même, qui constituent ce qu'on nomme la théorie des types et sur laquelle nous reviendrons.

La solution qui est adoptée aujourd'hui par les mathématiciens, ZFC, provient d'une axiomatisation de la théorie des ensembles proposée par Ernst Zermelo en 1908 et complétée dans les années 1920 par Abraham Fraenkel et John von Neumann. L'idée de cette solution est que seuls certains regroupements d'objets doivent être acceptés comme ensembles, mais pas tous. Il ne suffit pas de disposer d'une propriété, par exemple « l'ensemble x n'est pas élément de lui-même » pour avoir le droit de parler de l'ensemble des objets vérifiant la propriété, il faut être plus restrictif.

La théorie classique des ensembles : ZFC

La théorie ZFC soutient donc que certains regroupements définis par une propriété sont trop gros, et que seuls les regroupements soigneusement et progressivement construits comme nous l'expliquons plus loin sont des ensembles. La méthode se dénomme théorie de la limitation de taille.

Examinons les axiomes de ZFC pour voir comment s'effectue l'élimination des paradoxes. Le premier axiome indique, conformément au bon sens, que deux ensembles sont identiques si et seulement s'ils ont les mêmes éléments : un ensemble est

2. Les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes

L'antinomie de Bertrand Russell (photographie à droite) fut un tel choc qu'elle conduisit certains logiciens et mathématiciens, tel Dedekind, à abandonner temporairement la théorie des ensembles.

Russell distingue deux types d'ensembles, les ensembles qui sont un élément d'eux-mêmes (comme l'ensemble des idées, qui est une idée) et les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes (comme l'ensemble des éléphants, qui n'est pas un éléphant).

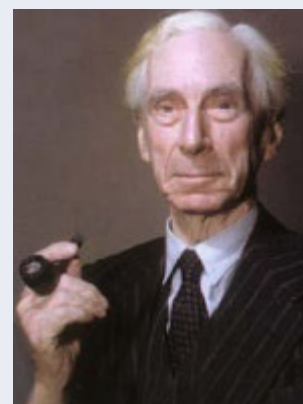
Le paradoxe consiste à raisonner de la manière suivante. Considérons l'ensemble E des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. Deux cas sont à envisager : E est élément de lui-même ou ne l'est pas.

— Si E n'est pas élément de lui-même, alors il possède la propriété caractéristique des éléments de E et il est donc dans E . Mais alors, E est élément de lui-même. C'est une contradiction !

— Si E est élément de lui-même, alors il n'a pas la propriété carac-

téristique des éléments de E (ne pas être élément d'eux-mêmes), ce qui implique que E ne peut pas être élément de lui-même. C'est, à nouveau, une contradiction.

Le catalogue de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas eux-mêmes conduit pareillement à une contradiction. S'il se mentionne lui-même, il n'est pas dans ce catalogue, mais s'il n'est pas dans le catalogue, alors c'est un catalogue qui ne se mentionne pas lui-même et il devrait y être.





3. Les axiomes de fondation et d'antifondation

L'axiome de fondation de ZFC indique que partant d'un ensemble (une boîte), si l'on prend l'un de ses éléments (une boîte-ensemble dans la boîte) et qu'on prend un élément dedans, etc., alors nécessairement on est obligé de s'arrêter : il n'existe pas de chaînes infinies descendantes $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ avec $x_1 \in x_0, x_2 \in x_1, x_3 \in x_2, x_4 \in x_3, \dots$

Cet axiome correspond à l'idée que lorsqu'on passe des êtres vivants aux cellules, des cellules aux molécules, des molécules aux atomes, des atomes aux quarks etc., on finit nécessairement par arriver à un ultime niveau qui n'est plus décomposable. L'axiome interdit aussi qu'un ensemble puisse se retrouver à l'intérieur de lui-même : $x \in x$ et interdit donc l'ensemble de tous les ensembles qui aurait cette propriété.

Le monde de la théorie classique des ensembles ZFC de Zermelo-Fraenkel correspond donc à une vue hiérarchisée du monde qui est facile à appréhender. C'est ce côté hiérarchisé et rassurant que la théorie des hyperensembles propose d'abandonner.

L'axiome d'antifondation qui définit la théorie des hyperensembles exprime que tout système d'équations, fini ou infini, de la forme : $x = \{1, \{7, 8\}, y, z\}; y = \{2, x, z\}; z = \{5\}$ (à gauche des variables représentant des ensembles, à droite des expressions utilisant les mêmes variables-ensembles) possède une solution unique : un hyperensemble.

L'équation $x = \{x\}$ définit l'hyperensemble le plus simple. Il est noté Ω et contient un élément : lui-même. C'est une sorte de bouteille de Klein. L'hyperensemble infiniment profond $\{1, \{2, \{3, \{\dots\}\}\}\}$ est le x_1 de la solution du système d'équations : $x_1 = \{1, x_2\}, x_2 = \{2, x_3\}, x_3 = \{3, x_4\}, \dots$

Cette possibilité de construire des ensembles infiniment profonds est un outil puissant de modélisation des structures autoréférentes souvent rencontrées en informatique où des objets dépendent mutuellement et cycliquement les uns des autres (jeux de pointeurs, flux de données, machines reliées en réseaux, etc.). Jon Barwise et John Etchemendy, dans leur livre intitulé *The Liar* (« Le menteur »), traitent les phrases autoréférentes et, par exemple, la phrase « je mens » est associée à l'hyperensemble $m = \{\text{faux}, \{m\}\}$ (une valeur de vérité, suivie d'un contexte simple composée dans ce cas de la phrase elle-même).

caractérisé par ses éléments, les connaître c'est le connaître. Les axiomes qui suivent donnent des moyens de construire de nouveaux ensembles à partir d'ensembles déjà connus. Ces axiomes sont les règles « légales » de définition et de manipulation de ces êtres mathématiques que sont les ensembles.

L'axiome de la réunion indique que si E est un ensemble, le regroupement des éléments d'ensembles appartenant à E , c'est-à-dire des x appartenant à des y appartenant à E , constitue encore un ensemble. De $E = \{\{a, b\}, \{\pi, 1/e\}, \{1, 2, 3\}\}$, on déduit l'existence de l'ensemble $\{a, b, \pi, 1/e, 1, 2, 3\}$. Ainsi, l'ensemble des nombres de Fibonacci $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$ et l'ensemble des nombres triangulaires $\{1, 3, 6, 10, 15, \dots\}$ forment un nouvel ensemble. Vous pouvez « parler » de l'ensemble des éléments présents dans l'un au moins des deux ensembles.

L'axiome de l'ensemble des parties affirme que le regroupement des sous-ensembles d'un ensemble E constitue lui aussi un ensemble. De $E = \{0, 1, 2\}$, on déduit l'existence de $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$. Notons « pour le plaisir » que si l'ensemble E a k éléments, il y a

C_k^1 éléments individuels, C_k^2 paires d'éléments, etc., et la formule du binôme donne $(1 + 1)^k = 1 + C_k^1 + C_k^2 + \dots + 1 = 2^k$. L'ensemble des parties de E a ainsi 2^k éléments.

L'axiome de séparation ou **axiome de compréhension restreint** indique que si $P(x)$ est une propriété [telle $x > 3$] et que E est un ensemble, alors les x qui sont dans E et qui vérifient cette propriété restrictive $P(x)$ constituent aussi un ensemble. Il est essentiel de noter que cet axiome permet de définir un ensemble à partir d'une propriété, ce qui est bien sûr souhaitable, mais qu'il impose la restriction de ne prendre que des x présents dans un ensemble déjà connu E .

- Cette définition permet d'envisager l'ensemble des nombres premiers. Pour cela, on part de l'ensemble des entiers [construit préalablement] et de la propriété $P(x)$: « x n'a pas de diviseurs autres que 1 et lui-même. »

- La propriété $x = x$, seule, ne définit pas un ensemble. Si c'était le cas, la formule définirait l'ensemble de tous les ensembles, ce qui contredirait le théorème de Cantor de ZFC.

- « Posséder deux éléments exactement » ne définit pas un ensemble dans ZFC.

C'est la clef de la résolution des paradoxes : elle empêche la définition d'ensembles trop gros. On ne peut pas parler de l'ensemble de tous les ensembles ni de l'ensemble des x qui possèdent la propriété de ne pas être éléments d'eux-mêmes. Les paradoxes de Russell et Cantor sont donc évités, de même d'ailleurs que le paradoxe de l'ensemble des ordinaux et celui de l'ensemble des cardinaux.

L'axiome de remplacement indique que si, étant donnée une fonction R telle que pour tout élément x d'un ensemble E , la fonction R détermine un élément y , alors les éléments y constituent un nouvel ensemble, F . En clair, l'image d'un ensemble E par une fonction R est un ensemble. Contrairement à l'axiome de séparation, l'axiome de remplacement peut engendrer [d'une manière contrôlée] des ensembles F qui ne sont pas inclus dans E .

L'axiome de l'infini indique qu'il existe au moins un ensemble infini E . Il existe plusieurs façons de définir un ensemble infini. L'une d'elles, due à Dedekind, consiste à dire que E est infini si E possède un sous-ensemble F différent de E , et que l'on peut mettre en bijection avec E . Selon cette définition, l'ensemble des entiers est infini, car l'ensemble des entiers peut être mis en bijec-