

tion avec l'ensemble des entiers pairs en doublant chaque entier (fonction $n \rightarrow 2n$).

L'axiome de fondation (AF), proposé par von Neumann en 1925, est explicité sur la figure 3 : il n'existe pas de chaînes infinies de boîtes-ensembles les unes dans les autres et pas de boîtes-ensembles qui se contiennent elles-mêmes !

L'axiome du choix (le « C » de ZFC) indique que si E est un ensemble d'ensembles non vides, alors il existe un ensemble F qui a un élément commun exactement avec chaque ensemble de E. De $\{\{0, 1, 2\}, \{\pi, 1/e\}, \{A, B\}\}$, on déduit l'existence d'un ensemble F comme $\{2, 1/e, B\}$. L'axiome du choix crée certaines difficultés (voir l'article d'octobre 2009 de cette rubrique) et c'est pour cela qu'on le fait apparaître dans le nom ZFC de la théorie.

Il est remarquable que ces simples axiomes, tous assez naturels, permettent l'expression de pratiquement toutes les idées et démonstrations mathématiques et que depuis plus d'un siècle qu'on explore les conséquences de ZFC, jamais aucune contradiction n'y a été découverte. Cependant, la méthode adoptée par ZFC opère une distinction entre ensembles et regroupements (définis seulement par une propriété). Cette distinction interdit de considérer que certains regroupements simples et naturels sont d'authentiques ensembles... ce qui est étrange. En un mot, la solution exprimée dans ZFC apparaît comme une rustine : elle répare la théorie initiale de Cantor, mais elle lui enlève sa beauté et sa généralité. Elle en limite la puissance en interdisant en particulier de mentionner un ensemble universel contenant la totalité des ensembles ou de définir le nombre n comme le regroupement de tous les ensembles possédant n éléments, selon l'élégante idée de Cantor et de Frege.

Les révisions possibles

Une extension de ZFC donne un statut théorique aux regroupements problématiques (ensemble de tous les ensembles, ensembles des ordinaux, etc). Elle consiste à introduire, à côté de la notion d'ensemble, la notion de classes en définissant certaines opérations entre classes, dont en particu-

lier la définition d'une classe à partir d'une propriété. La classe de tous les x qui vérifient $x = x$ correspond à l'ensemble de tous les ensembles. Cette théorie de von Neumann, Bernays et Gödel, notée NBG, est une première méthode pour disposer du droit de mentionner les gros ensembles problématiques interdits dans ZFC. Cependant, cette façon d'étendre ZFC n'est pas jugée satisfaisante, car elle se fonde sur une distinction artificielle et injustifiée entre deux catégories de regroupements, les ensembles et les classes, un peu comme dans une société qui considérerait deux types de citoyens : ceux qui jouissent pleinement de tous les droits (les ensembles), et ceux qui n'en ont qu'une partie sans qu'on sache trop bien pourquoi.

Une méthode plus élégante pour augmenter le pouvoir de ZFC consiste à revoir l'axiome de fondation qui est le dernier historiquement ajouté à ZFC et que d'ailleurs Cantor n'avait pas envisagé du tout.

En interdisant directement l'ensemble de tous les ensembles, l'axiome de fondation est rassurant. Cependant, on s'était déjà débarrassé des paradoxes avant de l'introduire. L'utilisation de l'axiome de fondation ressemble un peu à la méthode consistant à pendre un noyé pour être certain qu'il est bien mort ! Notons aussi que même si AF à lui seul évite le paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles, il est inopérant contre d'autres paradoxes et ne constitue donc pas une alternative complète à la doctrine de la limitation de la taille que met en œuvre ZFC.

Le Britannique Peter Aczel, et indépendamment les Italiens Marco Forti et Furio Honsell, ont proposé dans les années 1980 de renoncer à AF et de le remplacer. Acceptons l'idée qu'il y a des ensembles qui appartiennent à eux-mêmes, comme on accepte l'idée qu'il y a des nombres dont le carré est -1 , et imposons par un axiome particulier qu'il y en existe de toutes les sortes imaginables.

L'axiome d'antifondation, noté AFA (voir la figure 3), indique non seulement qu'il y a toutes sortes d'ensembles appartenant à eux-mêmes, mais que précisés par une loi adéquate, ils sont uniques. Cette double affirmation

d'existence et d'unicité confère à l'axiome AFA toute sa force et en fait l'intérêt. L'axiome AFA crée une révolution comparable à l'introduction des nombres complexes. En plus de tous les « ensembles habituels » qui bien sûr restent des ensembles dans cette théorie, il y a maintenant une multitude d'autres ensembles « antifondés » qu'on dénomme *hyperensembles*.

Les hyperensembles

En particulier, dans la théorie des hyperensembles ZFC – AF + AFA (tous les axiomes de ZFC, moins l'axiome de fondation, plus l'axiome AFA), il y a un hyperensemble unique noté Ω qui vérifie $x = \{x\}$. L'hyperensemble Ω est un être étrange possédant un seul élément, lui-même. D'après AFA, il est le seul à posséder cette propriété. Il représente une sorte de monde autiste, refermé en boucle sur lui-même !

Il y a aussi un hyperensemble unique qui vérifie $x = \{x, \emptyset\}$. C'est un objet étrange qui possède deux éléments : l'ensemble vide et lui-même. Il y aussi l'hyperensemble infiniment profond $\{0, \{1, \{2, \{3, \{\dots\}\}\}\}$ (voir la figure 3).

Ajouter un nouvel axiome comme AFA fait prendre des risques : si ZFC ne conduit jamais à une contradiction, en est-il de même de ZFC – AF + AFA ? La réponse est oui : on ne prend aucun risque avec AFA. En effet, P. Aczel a prouvé un résultat de « consistance relative » analogue à un autre obtenu par von Neumann pour AF : si la théorie usuelle des ensembles, ZFC, ne conduit jamais à une contradiction, alors il en est de même de ZFC – AF + AFA. Les hyperensembles n'introduisent aucun danger particulier de contradiction.

L'intérêt d'une théorie se prouve en l'appliquant. C'est aujourd'hui chose faite pour la théorie des hyperensembles. Les domaines dans lesquels elle a été utilisée sont principalement liés à l'informatique et à l'analyse des paradoxes. Plusieurs livres (voir la bibliographie) en donnent le détail. Notons que P. Aczel avait été amené à introduire les hyperensembles alors qu'il étudiait le problème informatique de la représentation formelle des flux de données et la synchronisation entre systèmes communicants fonctionnant