

tion avec l'ensemble des entiers pairs en doublant chaque entier (fonction $n \rightarrow 2n$).

L'axiome de fondation (AF), proposé par von Neumann en 1925, est explicité sur la figure 3 : il n'existe pas de chaînes infinies de boîtes-ensembles les unes dans les autres et pas de boîtes-ensembles qui se contiennent elles-mêmes !

L'axiome du choix (le « C » de ZFC) indique que si E est un ensemble d'ensembles non vides, alors il existe un ensemble F qui a un élément commun exactement avec chaque ensemble de E. De $\{\{0, 1, 2\}, \{\pi, 1/e\}, \{A, B\}\}$, on déduit l'existence d'un ensemble F comme $\{2, 1/e, B\}$. L'axiome du choix crée certaines difficultés (voir l'article d'octobre 2009 de cette rubrique) et c'est pour cela qu'on le fait apparaître dans le nom ZFC de la théorie.

Il est remarquable que ces simples axiomes, tous assez naturels, permettent l'expression de pratiquement toutes les idées et démonstrations mathématiques et que depuis plus d'un siècle qu'on explore les conséquences de ZFC, jamais aucune contradiction n'y a été découverte. Cependant, la méthode adoptée par ZFC opère une distinction entre ensembles et regroupements (définis seulement par une propriété). Cette distinction interdit de considérer que certains regroupements simples et naturels sont d'authentiques ensembles... ce qui est étrange. En un mot, la solution exprimée dans ZFC apparaît comme une rustine : elle répare la théorie initiale de Cantor, mais elle lui enlève sa beauté et sa généralité. Elle en limite la puissance en interdisant en particulier de mentionner un ensemble universel contenant la totalité des ensembles ou de définir le nombre n comme le regroupement de tous les ensembles possédant n éléments, selon l'élégante idée de Cantor et de Frege.

Les révisions possibles

Une extension de ZFC donne un statut théorique aux regroupements problématiques (ensemble de tous les ensembles, ensembles des ordinaux, etc). Elle consiste à introduire, à côté de la notion d'ensemble, la notion de classes en définissant certaines opérations entre classes, dont en particu-

lier la définition d'une classe à partir d'une propriété. La classe de tous les x qui vérifient $x = x$ correspond à l'ensemble de tous les ensembles. Cette théorie de von Neumann, Bernays et Gödel, notée NBG, est une première méthode pour disposer du droit de mentionner les gros ensembles problématiques interdits dans ZFC. Cependant, cette façon d'étendre ZFC n'est pas jugée satisfaisante, car elle se fonde sur une distinction artificielle et injustifiée entre deux catégories de regroupements, les ensembles et les classes, un peu comme dans une société qui considérerait deux types de citoyens : ceux qui jouissent pleinement de tous les droits (les ensembles), et ceux qui n'en ont qu'une partie sans qu'on sache trop bien pourquoi.

Une méthode plus élégante pour augmenter le pouvoir de ZFC consiste à revoir l'axiome de fondation qui est le dernier historiquement ajouté à ZFC et que d'ailleurs Cantor n'avait pas envisagé du tout.

En interdisant directement l'ensemble de tous les ensembles, l'axiome de fondation est rassurant. Cependant, on s'était déjà débarrassé des paradoxes avant de l'introduire. L'utilisation de l'axiome de fondation ressemble un peu à la méthode consistant à pendre un noyé pour être certain qu'il est bien mort ! Notons aussi que même si AF à lui seul évite le paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles, il est inopérant contre d'autres paradoxes et ne constitue donc pas une alternative complète à la doctrine de la limitation de la taille que met en œuvre ZFC.

Le Britannique Peter Aczel, et indépendamment les Italiens Marco Forti et Furio Honsell, ont proposé dans les années 1980 de renoncer à AF et de le remplacer. Acceptons l'idée qu'il y a des ensembles qui appartiennent à eux-mêmes, comme on accepte l'idée qu'il y a des nombres dont le carré est -1 , et imposons par un axiome particulier qu'il y en existe de toutes les sortes imaginables.

L'axiome d'antifondation, noté AFA (voir la figure 3), indique non seulement qu'il y a toutes sortes d'ensembles appartenant à eux-mêmes, mais que précisés par une loi adéquate, ils sont uniques. Cette double affirmation

d'existence et d'unicité confère à l'axiome AFA toute sa force et en fait l'intérêt. L'axiome AFA crée une révolution comparable à l'introduction des nombres complexes. En plus de tous les « ensembles habituels » qui bien sûr restent des ensembles dans cette théorie, il y a maintenant une multitude d'autres ensembles « antifondés » qu'on dénomme *hyperensembles*.

Les hyperensembles

En particulier, dans la théorie des hyperensembles ZFC – AF + AFA (tous les axiomes de ZFC, moins l'axiome de fondation, plus l'axiome AFA), il y a un hyperensemble unique noté Ω qui vérifie $x = \{x\}$. L'hyperensemble Ω est un être étrange possédant un seul élément, lui-même. D'après AFA, il est le seul à posséder cette propriété. Il représente une sorte de monde autiste, refermé en boucle sur lui-même !

Il y a aussi un hyperensemble unique qui vérifie $x = \{x, \emptyset\}$. C'est un objet étrange qui possède deux éléments : l'ensemble vide et lui-même. Il y a aussi l'hyperensemble infiniment profond $\{0, \{1, \{2, \{3, \{\dots\}\}\}\}$ (voir la figure 3).

Ajouter un nouvel axiome comme AFA fait prendre des risques : si ZFC ne conduit jamais à une contradiction, en est-il de même de ZFC – AF + AFA ? La réponse est oui : on ne prend aucun risque avec AFA. En effet, P. Aczel a prouvé un résultat de « consistance relative » analogue à un autre obtenu par von Neumann pour AF : si la théorie usuelle des ensembles, ZFC, ne conduit jamais à une contradiction, alors il en est de même de ZFC – AF + AFA. Les hyperensembles n'introduisent aucun danger particulier de contradiction.

L'intérêt d'une théorie se prouve en l'appliquant. C'est aujourd'hui chose faite pour la théorie des hyperensembles. Les domaines dans lesquels elle a été utilisée sont principalement liés à l'informatique et à l'analyse des paradoxes. Plusieurs livres (voir la bibliographie) en donnent le détail. Notons que P. Aczel avait été amené à introduire les hyperensembles alors qu'il étudiait le problème informatique de la représentation formelle des flux de données et la synchronisation entre systèmes communicants fonctionnant

4. Les progrès en théorie des ensembles

	ENSEMBLE DE TOUS LES ENSEMBLES	ANTINOMIE DE RUSSELL
THÉORIE CLASSIQUE DES ENSEMBLES ZFC AVEC L'ENSEMBLE DE FONDATION	Le paradoxe est éliminé par l'axiome de compréhension. On ne prend des éléments d'ensembles que dans des ensembles connus. Inconvénient : ce regroupement naturel est éliminé.	Le paradoxe est éliminé par l'axiome de fondation (pas d'emboîtement à l'infini) et il n'y a pas d'ensembles qui se contiennent eux-mêmes. Inconvénient : les ensembles autoréférents seraient utiles.
THÉORIE CLASSIQUE DES ENSEMBLES ZFC AVEC L'ENSEMBLE D'ANTIFONDATION	Le paradoxe est éliminé par l'axiome de compréhension. On ne prend des éléments d'ensembles que dans des ensembles connus. Inconvénient : il n'y a toujours pas de gros regroupements.	L'axiome d'antifondation autorise les emboîtements à l'infini : les ensembles qui se contiennent eux-mêmes existent et sont caractérisés par des équations.
THÉORIE DES TYPES DE RUSSELL	Les deux paradoxes sont éliminés. On considère les ensembles niveau par niveau, le niveau $n+1$ étant celui des ensembles dont les éléments sont de niveau n . Il existe un ensemble de tous les ensembles par niveau, mais pas d'ensemble vraiment universel, car les niveaux ne se mélangent pas. Inconvénient : il y a une infinité de niveaux et la pratique est difficile.	
THÉORIE NFU (NEW FOUNDATION ET URÉLÉMENTS)	Les deux paradoxes sont éliminés. À chaque fois qu'apparaît le symbole d'appartenance $\in$ dans une formule définissant un ensemble, le niveau de la variable à droite doit être $n+1$ si celui de la variable de gauche est n . Dérivée de la théorie de Russell, cette théorie est d'utilisation plus simple, car les niveaux portent sur les variables et non sur les ensembles.	

de manière ininterrompue comme le sont les ordinateurs connectés en réseaux. Un autre domaine d'application des hyperensembles est celui des bases de données et de la formalisation du langage naturel.

L'ensemble de tous les ensembles ?

La théorie des hyperensembles propose certes une extension de la notion d'ensemble. Mais elle ne donne pas encore la possibilité de parler de l'ensemble de tous les ensembles, car le théorème de Cantor y est toujours valide. C'est sur le problème de traiter de tels « gros regroupements » que des avancées remarquables ont été faites, dont plusieurs ces dernières années.

Au départ, il y a la tentative au début du XX^e siècle par Russell d'éviter les paradoxes par sa fameuse « théorie des types » qui a

été abandonnée du fait de sa complication. Dans ce système, on considère les ensembles niveau par niveau, le niveau $n+1$ étant celui des ensembles dont les éléments sont de niveau n . Chaque ensemble appartient à un niveau donné et il y a une infinité de catégories d'objets différents, ce qui crée de sérieuses contraintes de manipulation. Le système ZFC, qui n'envisage qu'un seul type d'objets, a donc été préféré.

Les paradoxes sont évités par Russell, car les seules formules autorisées dans sa théorie pour définir par compréhension de nouveaux ensembles doivent respecter le système de niveaux. Une formule comme « x appartient à x » n'a pas de sens dans la théorie, car dans une formule correcte de la théorie des types, la relation d'appartenance ne peut relier que deux niveaux différents.

Reprise par le logicien et philosophe américain Willard Quine en 1937, la théorie

des types de Russell est devenue un nouveau système d'axiomes bien plus simple dénommé *New Foundation* (NF). Malheureusement, Ernst Specker démontra en 1953 que NF contredit l'axiome du choix, ce qui rend NF malcommode pour les mathématiciens attachés à l'axiome du choix et qui, même s'ils s'en méfient, veulent pouvoir l'utiliser librement. Cela conduisit alors Ronald Jensen à proposer une nouvelle version de la théorie de Quine, nommée cette fois NFU (car on y introduit des objets dénommés « uréléments ») compatible avec l'axiome du choix. Depuis, cette théorie dont on peut dire qu'elle possède autant de bonnes propriétés que ZFC, tout en permettant de parler et de manipuler l'ensemble de tous les ensembles et d'autres « gros ensembles », est défendue comme un substitut possible à ZFC.

Un livre de Randall Holmes présente NFU d'une manière élémentaire et prouve ainsi que tout ce qui est fait avec ZFC peut l'être aussi commodément avec NFU. Si NFU n'est aujourd'hui pas utilisée, et même est souvent totalement ignorée, c'est sans doute principalement parce qu'elle est apparue tardivement. Voyons comment NFU évite les paradoxes.

Alors que ZFC (avec l'axiome AF ou dans sa version AFA) attaque les paradoxes en limitant la définition des ensembles à partir des formules par la contrainte de l'axiome de séparation, NF et NFU évitent les paradoxes sans cet artifice en exigeant en revanche que les formules qu'on utilise pour définir les ensembles soient « stratifiées ».

« Stratifié » signifie qu'il faut qu'on puisse attribuer des niveaux à chaque variable des formules utilisées pour définir les ensembles, d'une manière telle qu'à chaque fois qu'apparaît le symbole d'appartenance, $\in$, le niveau de la variable à droite soit $n+1$ si celui de la variable de gauche est n . Contrairement à la théorie des types qui obligeait à attribuer des niveaux aux ensembles eux-mêmes (multipliant ainsi des différentes sortes d'objets), ici l'attribution d'un niveau doit seulement se faire sur les variables des formules qu'on veut utiliser pour définir des ensembles. On est passé d'une contrainte globale d'attribution des niveaux à chaque

élément de l'Univers, à une contrainte temporaire et syntaxique s'appliquant juste aux formules utilisées pour définir des ensembles et qu'on peut oublier une fois l'ensemble défini. En pratique, la vérification que les formules qu'on utilise sont stratifiées est assez facile et moins contraignante que l'axiome de séparation de ZFC.

Donnons des exemples. La formule $x = x$ ne pose pas de problème. Comme elle n'utilise pas le symbole d'appartenance, elle est considérée stratifiée et, en conséquence, il existe un ensemble U des ensembles vérifiant $x = x$. Cet ensemble U est bien sûr l'ensemble de tous les ensembles qui a donc une existence pleine au sein de la théorie de Quine ou de la théorie de Jensen.

La formule $x \in x$ n'est bien sûr pas stratifiée, de même que la formule $x \notin x$ qui conduirait au paradoxe de Russell. Ces deux formules ne définissent pas d'ensembles et on évite donc le paradoxe de Russell. Si E est un ensemble, la formule $x \notin E$ est stratifiée, ce qui signifie que dans NF ou NFU, le complémentaire d'un ensemble (vis-à-vis de tout) existe, alors que dans ZFC le complémentaire d'un ensemble n'existe que relativement à un autre ensemble.

Le paradoxe de Cantor créé par le théorème de Cantor est évité, car dans NF et NFU le théorème de Cantor n'est plus vrai (sa démonstration s'appuie sur une formule non stratifiée). C'est peut-être dommage, mais c'est le coût qu'il faut accepter de payer pour que l'on puisse parler de l'ensemble de tous les ensembles.

Dans NF et NFU, on peut introduire et manipuler sans problème l'ensemble des tous les ordinaux, et l'ensemble de tous les cardinaux. Ces théories sont donc bien une autre façon de slalomer entre les paradoxes sans jamais s'y cogner. Elles montrent que l'ensemble de tous les ensembles et bien d'autres gros ensembles interdits dans les théories des ensembles de type ZFC (avec AF ou avec AFA) peuvent recevoir un statut simple, au sein d'une théorie mathématique homogène, et que c'est donc une erreur de croire que l'ensemble de tous les ensembles et les autres gros ensembles de ZFC sont des concepts paradoxaux.

Citons R. Holmes, défenseur de NFU y compris pour l'initiation et l'enseignement : « La raison pour laquelle nous croyons que NFU est un bon moyen pour l'apprentissage de la théorie des ensembles est qu'elle autorise presque toutes les constructions naturelles de la théorie naïve des ensembles, qui est celle de Frege et cela sans limitations artificielles. [...] Les nombres cardinaux finis ou infinis peuvent être définis en suivant les idées de Cantor et Frege. De même, pour les ordinaux. [...] Les grosses classes intéressantes sont vraiment des ensembles : c'est le cas de l'ensemble de tous les groupes, de l'ensemble de tous les espaces topologiques [...] »

L'ordre d'arrivée sur le terrain

Venues trop tard sans doute pour s'imposer maintenant devant ZFC, les théories alternatives des ensembles, que ce soient NBG, ZFC – AF + AFA ou NFU, présentent toutes des avantages sur ZFC dont elles étendent le pouvoir de représentation. Ces théories, et d'autres encore que nous n'avons pas mentionnées ici, mettent à la disposition des mathématiciens des univers plus riches et plus étendus (à chaque fois en un sens précis). Elles constituent peut-être de meilleures bases pour fonder les mathématiques et penser l'Univers, y compris celui de la physique. La relative indifférence dont elles sont victimes illustre les aléas de l'histoire des sciences où, comme dans les compétitions militaires et commerciales, l'ordre d'arrivée sur le terrain joue un rôle déterminant, condamnant parfois les meilleurs à jouer les seconds rôles, voire à la mort.

Il serait cependant souhaitable que le plus grand nombre possible de mathématiciens, de scientifiques et de philosophes ait conscience de cette sorte d'injustice et ne pense pas faussement que l'autoréférence ensembliste (x appartient à x) est contradictoire, ni que parler de l'ensemble de tous les ensembles et des autres « grosses classes » (ce qu'on a toujours eu envie de faire) conduit inévitablement au désastre de l'inconsistance. Ce n'est pas vrai.

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

R. Holmes, *Elementary set theory with a universal set*, 1998/2010 : <http://math.boisestate.edu/ffholmes/holmes/head.ps>

L. Moss, *Non-wellfounded set theory*, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2008 : <http://plato.stanford.edu/entries/nonwellfounded-set-theory/>

R. Holmes, *Alternative axiomatic set theories*, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2006 : <http://plato.stanford.edu/entries/settheory-alternative/>

J. Barwise et L. Moss, *Vicious circles*, *CSLI Lecture Notes n° 60*, CSLI Publications, 1996.

Th. Forster, *Set Theory with a Universal Set*, Oxford logic guides, n° 31 (2^e édition), Cambridge University Press, 1995.

P. Aczel, *Lectures on nonwellfounded sets*, *CSLI Lecture Notes n° 9*, 1987.

J. Barwise et J. Etchemendy, *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, Oxford University Press, 1987.

R. Jensen, *On the consistency of a slight (?) modification of Quine's 'New Foundations'*, *Synthese*, vol. 19, pp. 250-263, 1969.

W. Quine, *New foundations for mathematical logic*, *American Mathematical Monthly*, vol. 44, pp. 70-80, 1937.