

élément de l'Univers, à une contrainte temporaire et syntaxique s'appliquant juste aux formules utilisées pour définir des ensembles et qu'on peut oublier une fois l'ensemble défini. En pratique, la vérification que les formules qu'on utilise sont stratifiées est assez facile et moins contraignante que l'axiome de séparation de ZFC.

Donnons des exemples. La formule $x = x$ ne pose pas de problème. Comme elle n'utilise pas le symbole d'appartenance, elle est considérée stratifiée et, en conséquence, il existe un ensemble U des ensembles vérifiant $x = x$. Cet ensemble U est bien sûr l'ensemble de tous les ensembles qui a donc une existence pleine au sein de la théorie de Quine ou de la théorie de Jensen.

La formule $x \in x$ n'est bien sûr pas stratifiée, de même que la formule $x \notin x$ qui conduirait au paradoxe de Russell. Ces deux formules ne définissent pas d'ensembles et on évite donc le paradoxe de Russell. Si E est un ensemble, la formule $x \notin E$ est stratifiée, ce qui signifie que dans NF ou NFU, le complémentaire d'un ensemble (vis-à-vis de tout) existe, alors que dans ZFC le complémentaire d'un ensemble n'existe que relativement à un autre ensemble.

Le paradoxe de Cantor créé par le théorème de Cantor est évité, car dans NF et NFU le théorème de Cantor n'est plus vrai (sa démonstration s'appuie sur une formule non stratifiée). C'est peut-être dommage, mais c'est le coût qu'il faut accepter de payer pour que l'on puisse parler de l'ensemble de tous les ensembles.

Dans NF et NFU, on peut introduire et manipuler sans problème l'ensemble des tous les ordinaux, et l'ensemble de tous les cardinaux. Ces théories sont donc bien une autre façon de slalomer entre les paradoxes sans jamais s'y cogner. Elles montrent que l'ensemble de tous les ensembles et bien d'autres gros ensembles interdits dans les théories des ensembles de type ZFC (avec AF ou avec AFA) peuvent recevoir un statut simple, au sein d'une théorie mathématique homogène, et que c'est donc une erreur de croire que l'ensemble de tous les ensembles et les autres gros ensembles de ZFC sont des concepts paradoxaux.

Citons R. Holmes, défenseur de NFU y compris pour l'initiation et l'enseignement : « La raison pour laquelle nous croyons que NFU est un bon moyen pour l'apprentissage de la théorie des ensembles est qu'elle autorise presque toutes les constructions naturelles de la théorie naïve des ensembles, qui est celle de Frege et cela sans limitations artificielles. [...] Les nombres cardinaux finis ou infinis peuvent être définis en suivant les idées de Cantor et Frege. De même, pour les ordinaux. [...] Les grosses classes intéressantes sont vraiment des ensembles : c'est le cas de l'ensemble de tous les groupes, de l'ensemble de tous les espaces topologiques [...] »

L'ordre d'arrivée sur le terrain

Venues trop tard sans doute pour s'imposer maintenant devant ZFC, les théories alternatives des ensembles, que ce soient NBG, ZFC – AF + AFA ou NFU, présentent toutes des avantages sur ZFC dont elles étendent le pouvoir de représentation. Ces théories, et d'autres encore que nous n'avons pas mentionnées ici, mettent à la disposition des mathématiciens des univers plus riches et plus étendus (à chaque fois en un sens précis). Elles constituent peut-être de meilleures bases pour fonder les mathématiques et penser l'Univers, y compris celui de la physique. La relative indifférence dont elles sont victimes illustre les aléas de l'histoire des sciences où, comme dans les compétitions militaires et commerciales, l'ordre d'arrivée sur le terrain joue un rôle déterminant, condamnant parfois les meilleurs à jouer les seconds rôles, voire à la mort.

Il serait cependant souhaitable que le plus grand nombre possible de mathématiciens, de scientifiques et de philosophes ait conscience de cette sorte d'injustice et ne pense pas faussement que l'autoréférence ensembliste (x appartient à x) est contradictoire, ni que parler de l'ensemble de tous les ensembles et des autres « grosses classes » (ce qu'on a toujours eu envie de faire) conduit inévitablement au désastre de l'inconsistance. Ce n'est pas vrai.

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

R. Holmes, *Elementary set theory with a universal set*, 1998/2010 : <http://math.boisestate.edu/~ffholmes/holmes/head.ps>

L. Moss, *Non-wellfounded set theory*, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2008 : <http://plato.stanford.edu/entries/nonwellfounded-set-theory/>

R. Holmes, *Alternative axiomatic set theories*, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2006 : <http://plato.stanford.edu/entries/settheory-alternative/>

J. Barwise et L. Moss, *Vicious circles*, *CSLI Lecture Notes n° 60*, CSLI Publications, 1996.

Th. Forster, *Set Theory with a Universal Set*, *Oxford logic guides*, n° 31 [2^e édition], Cambridge University Press, 1995.

P. Aczel, *Lectures on nonwellfounded sets*, *CSLI Lecture Notes n° 9*, 1987.

J. Barwise et J. Etchemendy, *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, Oxford University Press, 1987.

R. Jensen, *On the consistency of a slight (?) modification of Quine's 'New Foundations'*, *Synthese*, vol. 19, pp. 250-263, 1969.

W. Quine, *New foundations for mathematical logic*, *American Mathematical Monthly*, vol. 44, pp. 70-80, 1937.

ART & SCIENCE

Le Maître des jeans

Un peintre anonyme du XVII^e siècle a représenté plusieurs fois dans ses tableaux des gens pauvres de l'Italie du Nord, habillés d'une toile bleue : celle de nos jeans actuels.

Loïc MANGIN

Pour beaucoup, le jean serait né avec Oscar Levi Strauss au milieu du XIX^e siècle ; il est indissociable de la ruée vers l'or en Californie. Mais cette histoire est celle du pantalon, et non du tissu avec lequel ces vêtements sont fabriqués. Or l'origine de cette étoffe – un tissu de coton constitué d'une trame blanche et d'un fil de chaîne bleu – est à chercher en Europe, et plus précisément dans la région de Nîmes (dont le nom a conduit au terme *denim* pour désigner la toile de jeans) et de Gênes (d'où dérive le mot *jeans*). Cependant, excepté quelques figures de crèche du XVIII^e siècle, les témoignages visuels sont rares.

D'autres ont été récemment découverts. Il s'agit d'une dizaine de tableaux qui ont été attribués à un artiste actif à Gênes, au XVII^e siècle, encore anonyme, et dont huit sont exposés dans une galerie parisienne. Parmi eux, on peut voir la *Femme mendiant avec deux enfants* (voir la figure page ci-contre). Depuis 2006, Gerlinde Gruber, conservateur au *Kunsthistorisches museum* de Vienne, en Autriche, s'attache à rassembler les œuvres de celui qui est désormais connu sous le nom de Maître de la toile de jeans. Elle s'est fondée sur des critères stylistiques et thématiques pour en reconnaître la paternité d'un unique artiste qui exerçait dans la seconde moitié du XVII^e siècle en Lombardie et en Vénétie.

Sur la plupart des tableaux, on distingue une étoffe bleue qui, lorsqu'elle est abîmée, montre le fil de trame blanc. On a donc bien à faire à une toile de jeans. Qui plus est, dans certaines œuvres, on voit suffisamment bien les coutures pour reconnaître un point utilisé en sellerie, celui qu'arborescent les jeans actuels !

Le parallèle va plus loin. La toile de jean fut à ses débuts teinte avec de la guède (le pastel des teinturiers), une plante jadis très cultivée dans le Sud-Ouest de la France. Cependant, ce pigment fut remplacé par l'indigo (également d'origine végétale), meilleur marché et importé des régions chaudes, notam-



Courtoisie de la galerie Canessa

ment de Gênes, favorisé par son port. Or l'analyse de prélèvements effectués sur les tableaux a montré que le peintre a utilisé de l'indigo pour ses bleus !

Dans l'Italie de cette époque, ce tissu très résistant, fabriqué à Gênes, est utilisé pour des vêtements destinés aux classes sociales les plus modestes, ainsi qu'aux militaires ; en témoigne la veste passémentée du *Petit mendiant avec une part de tourte* (voir ci-

dessus). Les vêtements étaient probablement transmis aux générations suivantes et portés jusqu'à l'usure, ce qui explique la rareté des témoignages.

La représentation d'individus humbles et de mendiants, dont aucun ne semble se plaindre, inscrit le Maître de la toile de jeans dans le courant nommé « peinture de la réalité » dont les chefs de file furent les frères Le Nain. Les représentations de la pauvreté sont alors nombreuses à travers toute l'Europe, de Vélasquez en Espagne jusqu'à des artistes flamands, en passant par Georges de La Tour.

Le jean tel qu'on le porte aujourd'hui est-il né à Nîmes ou à Gênes ? La ville française fut un important centre de production textile, et notamment de cotonnades, à partir du XVIII^e siècle et exporta beaucoup, en particulier vers l'Angleterre et, partant, vers l'Amérique du Nord. Toutefois, Gênes et tout le Nord de l'Italie en constituaient une plaque tournante du marché du coton depuis le XII^e siècle. Et la toile de Gênes eut aussi son heure de gloire à l'export, et sans doute avant le denim : l'étoffe, peu chère et de bonne qualité, est mentionnée dans les comptes d'un tailleur du Lancashire, en 1614.

Selon l'historienne Marzia Cataldi Gallo, les deux dénominations (jeans de Gênes et denim de Nîmes) coexistent aux États-Unis à la fin du XVIII^e siècle. L'histoire du jean n'a pas encore livré tous ses secrets, mais d'ores et déjà, on doit remplacer le chercheur d'or américain par un mendiant de Lombardie.

« *Il Maestro della tela jeans* », exposition jusqu'au 27 novembre, à la galerie Canessa, 26, rue Laffitte, 75009 Paris.



Courtoisie de la galerie Canessa

IDÉES DE PHYSIQUE

Les hologrammes, du vrai 3D

L'holographie, capable de restituer l'image entière d'un objet dans ses trois dimensions, reste une technique d'avant-garde.

Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK

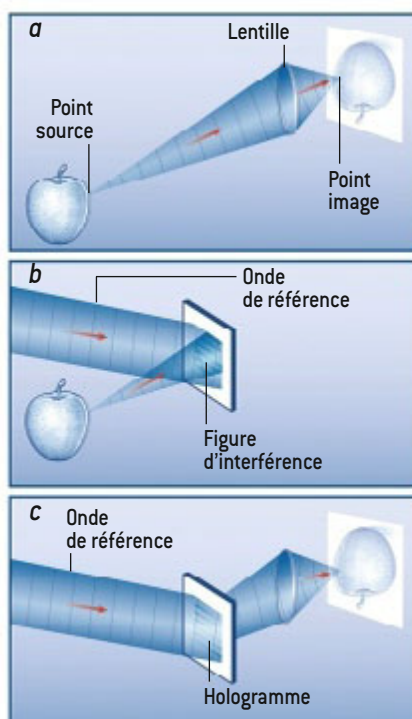
Cinéma 3D, bientôt écrans d'ordinateur et appareils photo 3D : les dispositifs pour voir en relief se multiplient ces derniers temps. Ils sont conçus pour donner l'illusion du relief en jouant avec la vision stéréoscopique humaine. C'est l'occasion de rappeler que l'holographie, elle, peut reconstituer une image tridimensionnelle et fidèle d'un objet quelconque. Et plus qu'une technique de photographie à trois dimensions, l'holographie offre la possibilité de réaliser des composants optiques particuliers ou des procédés optiques d'authentification.

Avant d'aborder l'holographie, rappelons ce qui se passe en photographie. Quand on éclaire un objet opaque, sa surface diffuse de la lumière dans toutes les directions. On peut intercepter cette lumière en regardant l'objet, ou en la focalisant sur une plaque photographique grâce à un objectif. Une photographie est ainsi une projection, sur un plan, d'une scène à trois dimensions. Qu'enregistre-t-elle ?

Sauvegarder la phase de l'onde lumineuse

La lumière visible est composée d'ondes électromagnétiques sinusoïdales de différentes fréquences (ou couleurs). Chacune de ces ondes est caractérisée par l'amplitude de son oscillation, mais aussi par une phase, qui indique à quel stade dans le cycle d'oscillation l'onde se trouve à un instant donné.

Or un capteur photographique, qu'il soit chimique ou électronique, ne reproduit pas



1. GRÂCE À UNE LENTILLE, on focalise la lumière issue d'un point objet en un point image [a]. Le même point image peut être obtenu en l'absence de l'objet, par le principe de l'holographie. La méthode consiste d'abord à créer et enregistrer une figure d'interférence, avec de la lumière laser (monochromatique et cohérente). Si le point source se trouve assez loin face à un écran, ce dernier est éclairé uniformément et la phase de l'onde lumineuse y est constante ; en superposant à cette onde une « onde plane » de référence arrivant de biais, on crée une figure d'interférence formée de bandes alternativement sombres et brillantes [b]. Cette figure étant enregistrée, son éclairage par l'onde de référence restitue le point image, en l'absence du point source [c].

complètement le champ lumineux reçu. En chaque point de détection, il enregistre l'intensité lumineuse moyennée sur la durée d'exposition (soit, à un facteur constant près, le carré de l'amplitude), mais pas les phases des ondes. Or ces phases indiquent les retards relatifs des ondes. Ces retards dépendent de la distance parcourue par les ondes depuis l'objet et portent ainsi en eux une information sur le relief.

D'où l'enjeu : si l'on enregistrerait à la fois l'amplitude et la phase des ondes issues de l'objet, c'est-à-dire le champ électromagnétique original, il serait possible de restituer une image complète, tridimensionnelle, de l'objet. C'est le physicien hongrois Dennis Gabor qui, en 1947, trouva la solution à ce problème dans le cadre de la microscopie électronique. Mais il a fallu l'apparition du laser dans les années 1960 pour que sa solution soit appliquée dans le domaine de l'optique et devienne l'holographie.

Considérons pour simplifier une onde lumineuse monochromatique (d'une seule couleur). Comment mémoriser sa phase ? En la faisant interférer avec une onde de référence qui éclaire simultanément la plaque photographique.

Si, en un point donné, les oscillations des deux ondes sont en phase, elles atteignent leurs maximums en même temps et leur addition donne une amplitude plus élevée, donc une intensité lumineuse supérieure. Si, au contraire, les deux ondes vibrent en opposition de phase, leur addition produit une onde d'amplitude inférieure, donc plus obscure. Le déphasage entre l'onde de référence, parfaitement connue, et l'onde