

LOGIQUE & CALCUL



Le plus célèbre des puzzles suggère de nouvelles variantes du jeu et d'intéressants problèmes de géométrie, que parfois seule la patience d'un ordinateur peut affronter.

Jean-Paul DELAHAYE

Le *Tangram* est sans doute le plus populaire des jeux géométriques. Tout le monde le connaît et y a joué au moins une fois. Sam Loyd, le célèbre amateur et inventeur de récréations mathématiques, en fait une présentation détaillée en 1903 dans un ouvrage intitulé *Le huitième livre de Tan* (« The Eighth Book of Tan ») où il propose plusieurs centaines de figures à réaliser avec les sept pièces du jeu... dont certaines sont impossibles à obtenir. Se prétendant bien informé, il donne des détails sur l'histoire du jeu :

« D'après le professeur Challenor, dont les manuscrits posthumes sont en ma possession, il existe en Chine sept livres de *Tangram* contenant chacun un millier de figures. Leur origine remonterait à il y a environ 4 000 ans. Ces livres sont si rares que le professeur Challenor, pendant les 40 ans qu'il a résidé en Chine, n'a réussi à voir des exemplaires complets que du premier et du septième, ainsi que quelques fragments du deuxième. Une portion de l'un des ouvrages, imprimés sur des feuilles d'or, a été retrouvée à Pékin par un soldat anglais qui l'acheta pour 300 livres à un collectionneur d'antiquités, et j'ai été aimablement autorisé à en reproduire certains motifs. »

Ces éléments d'histoire furent répétés avant que Martin Gardner fasse en 1974 une mise au point détaillée, où il explique que tout n'est qu'une affabulation malicieuse de Loyd. La plus ancienne trace écrite du jeu se trouve dans un livre de 1803,

publié effectivement en Chine, dont le titre signifie « Collection de formes pour le jeu à sept pièces ».

Un jeu pas si ancien

Le nom *Tangram* n'apparaît qu'en 1848 dans un ouvrage de Thomas Hill, *Problèmes géométriques pour les jeunes* (*Geometrical Puzzle for the Youth*). Lewis Carroll et Edgar Poe appréciaient le jeu et l'on raconte que Napoléon avait un *Tangram* à Sainte-Hélène. Le jeu est universel : on l'utilise dans les écoles et pour se distraire. Des dizaines de fabricants en proposent toutes sortes de réalisations matérielles en bois ou en plastique. Vous avez probablement un *Tangram* chez vous.

Le terme serait construit à partir du mot *tan*, qui aurait signifié prostituée dans certaines régions en Chine, et désignerait *Le jeu des prostituées*. Une autre hypothèse évoque l'ancien mot anglais *Trangram* avec deux *r*, signifiant jouet compliqué, qui aurait été repris et déformé. Dans le dictionnaire *Websters* de 1913, on trouve par exemple la définition : « *Trangram* : something intricately contrived. »

Le jeu est utile pour la familiarisation des jeunes enfants avec les formes de base de la géométrie. Mais il est peu mathématique si l'on ne se donne comme but que la reproduction des silhouettes imprimées sur les fascicules accompagnant les boîtes de jeu. Il suscite aussi une multitude de questions de nature vraiment mathématique dont certaines sont difficiles, voire non résolues.

Commençons par les plus simples en nous limitant au jeu du *Tangram* classique avec ses sept pièces bien déterminées : deux petits triangles isocèles rectangles *t*, un carré *c*, un parallélogramme *p* et un autre triangle isocèle rectangle *t'*, chacune des trois pièces *c*, *p* et *t'* ayant été obtenue en accolant deux *t*, et enfin deux grands triangles isocèles rectangles *t''*, obtenus cette fois avec quatre *t* chacun. En tout, on a les sept pièces, parfois dénommées *tan*.

Si l'unité de longueur est le petit côté de *t*, alors son hypoténuse a pour longueur $\sqrt{2}$. Le côté du carré *c* est 1 ; les côtés du parallélogramme *p* valent 1 et $\sqrt{2}$; ceux du triangle *t'* valent $\sqrt{2}$ et 2, et ceux de *t''* valent 2 et $2\sqrt{2}$.

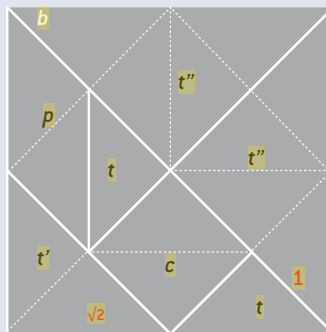
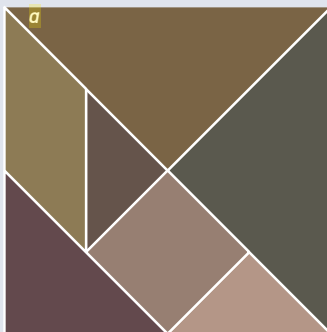
Trois catégories de motifs

Il est utile de classer les motifs donnés à faire aux joueurs en trois catégories. Il y a les motifs généraux auxquels on ne demande que d'être d'un seul tenant, d'utiliser chaque pièce une fois exactement et bien sûr d'être sans recouvrement. Tous les motifs de la figure 1e, sauf le motif 11 dont une pièce est détachée des autres, sont des motifs généraux.

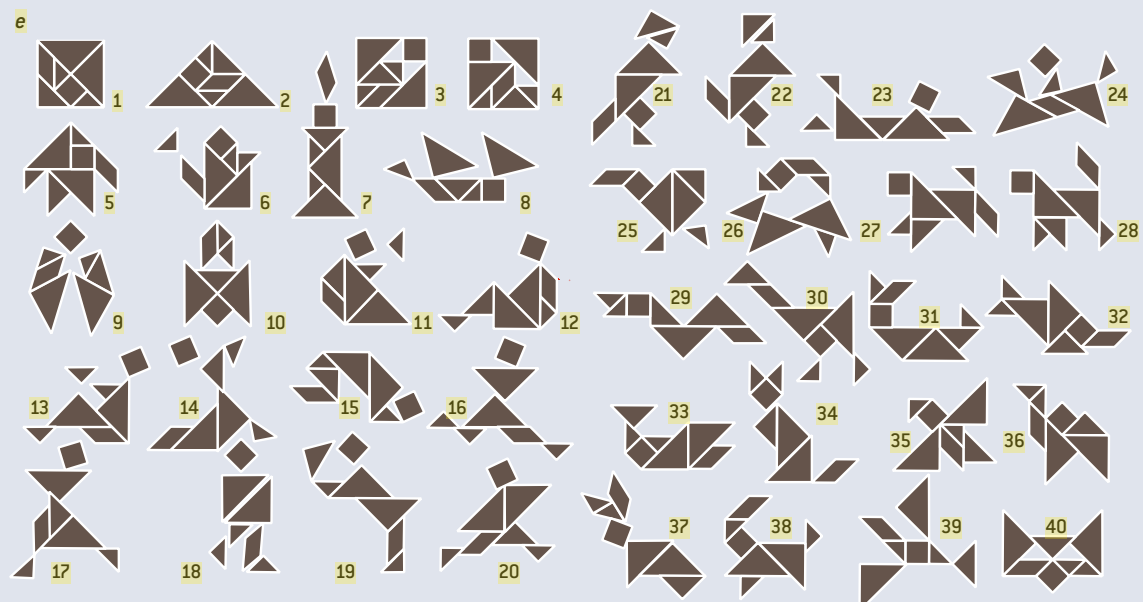
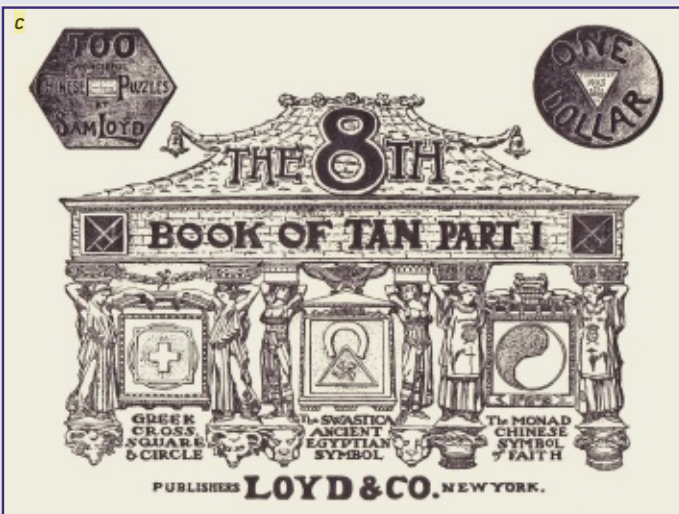
Les motifs propres seront les motifs généraux auxquels on impose en plus d'avoir un périmètre topologiquement équivalent à un cercle. Cela revient à exiger que l'intérieur du motif soit d'un seul tenant et qu'il n'y ait pas de trou dans le motif.



1. Le monde du *Tangram*



Le *Tangram* (a) est composé de sept pièces : le petit triangle isocèle rectangle t , le carré c , le parallélogramme p , le triangle isocèle rectangle t' , le triangle isocèle rectangle t'' , pièces qui sont toutes obtenues à partir de la plus petite (en double exemplaire), le triangle isocèle rectangle t de côté 1 et $\sqrt{2}$ (b). Sam Loyd a imaginé un inventeur chinois du *Tangram* du nom de Tan, et le huitième livre de Tan (c). En (d), un livre chinois du XIX^e siècle illustrant l'intérêt des géomètres chinois pour les *Tangrams*. En (e), quelques motifs parmi les milliers proposés par les amateurs du jeu.



Les motifs 1, 2, 33, 35, 36 sont des motifs propres (voir l'illustration ci-dessous). Le motif 10 n'est pas un motif propre, car il possède un trou, de même que le motif 40 qui en a deux. Les motifs 6, 7 et 8 ne sont pas des motifs propres pour une autre raison : deux pièces ne se touchent que par un point et non selon un segment.

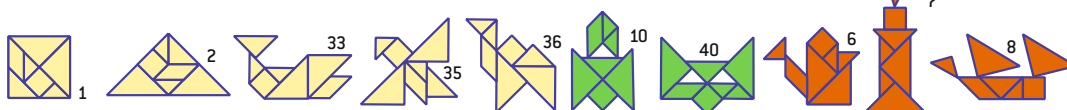
La troisième catégorie de figures à réaliser est celle des *snug-motifs* : en anglais *snug* signifie « petit et bien arrangé ». Ils sont plus contraints et utilisent l'idée que chaque pièce est composée à partir d'un même petit triangle isocèle rectangle pris une, deux ou quatre fois. D'après la définition proposée par Ronald Read, les *snug-motifs* sont des motifs propres tels qu'en décomposant chaque pièce en triangles isocèles rectangles t , deux pièces ayant un segment en commun ont au moins un côté en commun pour deux de leurs triangles de base t (ce côté commun peut être le petit côté du triangle rectangle de base, ou son hypoténuse). On peut noter

donc pas si facile et qu'il publia. Essayez de la trouver ou faites un programme pour cela (voir la solution en figure 3).

Dénombrements manquants

Les dénombrements des trois grandes catégories de motifs du *Tangram* sont très faciles ou très difficiles. Il est bien évident que les motifs généraux et les motifs propres sont en nombre infini. Le fait de pouvoir faire pivoter certains groupes de pièces, ou d'en faire glisser continûment, rend cette infinité non dénombrable (c'est-à-dire de la même sorte que l'infinité des nombres réels, et non pas de la sorte de celle des entiers). Les *snug-motifs* sont en nombre fini : à chaque fois qu'on ajoute une nouvelle pièce dans une construction, elle ne peut se placer qu'à un nombre fini d'endroits.

Cette idée de construction progressive permet de majorer le nombre de *snug-motifs*. En voici les étapes :



que cette règle impose des contraintes d'orientation fortes à chaque pièce : si le carré est placé horizontalement, alors tous les côtés de longueur 1 ou 2 seront horizontaux ou verticaux, et tous les autres côtés (de longueur $\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$) seront sur des droites diagonales (à 45 ou à 135 degrés). Les motifs 1, 2 et 5 sont des *snug-motifs*. En revanche, les motifs 35 et 36 ne sont pas des *snug-motifs*.

Quelques questions mathématiques sur ces formes sont présentées et résolues sur la figure 2.

Dans ses articles consacrés au *Tangram*, Martin Gardner posa la question du nombre de motifs propres pentagonaux. Il proposait une solution et un raisonnement pour la justifier. Malheureusement, son raisonnement comportait une petite erreur, ce qui provoqua l'arrivée dans son courrier d'une énorme quantité de lettres de lecteurs outragés. L'analyse et la compilation de ces lettres le conduisirent à la bonne réponse, qui n'est

– À chaque étape du montage d'un motif, on accole 2 (ou plus) des 30 côtés des pièces. Côté signifie ici côté d'un des triangles élémentaires t qui composent les pièces ; ces côtés sont 30 en tout pour les sept pièces du *Tangram*. On suppose qu'on a attribué un numéro de 1 à 30 à chacun des côtés.

– Il y a six étapes de montage pour un motif, car une fois la première pièce posée, six fois de suite, on accole une des pièces restantes.

– La donnée de 12 nombres entre 1 et 30 détermine donc une construction possible au plus : les deux premiers nombres indiquent les deux côtés qu'on accole en premier, les deux nombres suivants indiquent les deux côtés qu'on accole en second, etc.

– Conclusion : il existe au plus $30^{12} = 5,3 \times 10^{17}$ *snug-motifs*.

Bien sûr, plusieurs suites de 12 numéros différents peuvent aboutir au même

motif, et certaines suites ne donnent pas un motif véritable à cause du recouvrement des pièces ou de l'utilisation (dans le choix des 12 numéros) d'un côté qui n'est plus libre. Le nombre qu'on vient de calculer est donc une majoration très large.

La question du dénombrement exact des *snug-motifs* est si difficile qu'elle est restée irrésolue jusqu'en 2004, année où R. Read a établi, à l'aide d'un programme, qu'il y en a en tout 4 842 205. Ce dénombrement est resté peu diffusé. On ne le trouve pas mentionné dans *Wikipédia* (ni en français ni en anglais) et, à ma connaissance, aucun site Internet ou livre ne le signale. Je ne pense pas non plus qu'il ait été vérifié.

Un dernier dénombrement difficile mériterait d'être étudié soigneusement. Pour éviter les glissements, on peut considérer les motifs propres possédant la propriété que si deux bords de pièces ont un segment en commun, alors ils ont aussi une extrémité en commun.

Ces motifs *bien positionnés* (en anglais on les nomme *fully matched*) sont plus nombreux que les *snug-motifs*. Bien sûr, tout *snug-motif* est un motif bien positionné, mais l'inverse n'est pas vrai ; par exemple, le motif 31 (voir la figure 1e) n'est pas un *snug-motif* (car certaines pièces ont un segment commun sans que les côtés des t de base s'ajustent bien), mais est un motif bien positionné au sens indiqué plus haut.

On voit facilement que dès qu'une pièce d'un motif bien positionné est en place, les sommets des autres pièces ne peuvent plus occuper qu'un nombre fini de points du plan. Il en résulte que les motifs bien positionnés sont en nombre fini. *Wikipédia* indique qu'il en existerait 6,13 millions, mais ce nombre apparaît trop faible pour être compatible avec le nombre de *snug-motifs* calculé par R. Read, et aucun nombre plus précis n'est cité. Je n'ai pas réussi à savoir si ce résultat est une évaluation approximative ou le fruit d'un calcul exact reproduit incomplètement.

En considérant la possibilité de trous dans les motifs, ce qui permet certains