

Les motifs 1, 2, 33, 35, 36 sont des motifs propres (voir l'illustration ci-dessous). Le motif 10 n'est pas un motif propre, car il possède un trou, de même que le motif 40 qui en a deux. Les motifs 6, 7 et 8 ne sont pas des motifs propres pour une autre raison : deux pièces ne se touchent que par un point et non selon un segment.

La troisième catégorie de figures à réaliser est celle des *snug-motifs* : en anglais *snug* signifie « petit et bien arrangé ». Ils sont plus contraints et utilisent l'idée que chaque pièce est composée à partir d'un même petit triangle isocèle rectangle t pris une, deux ou quatre fois. D'après la définition proposée par Ronald Read, les *snug-motifs* sont des motifs propres tels qu'en décomposant chaque pièce en triangles isocèles rectangles t , deux pièces ayant un segment en commun ont au moins un côté en commun pour deux de leurs triangles de base t (ce côté commun peut être le petit côté du triangle rectangle de base, ou son hypoténuse). On peut noter

donc pas si facile et qu'il publia. Essayez de la trouver ou faites un programme pour cela (voir la solution en figure 3).

Dénombrements manquants

Les dénombrements des trois grandes catégories de motifs du *Tangram* sont très faciles ou très difficiles. Il est bien évident que les motifs généraux et les motifs propres sont en nombre infini. Le fait de pouvoir faire pivoter certains groupes de pièces, ou d'en faire glisser continûment, rend cette infinité non dénombrable (c'est-à-dire de la même sorte que l'infinité des nombres réels, et non pas de la sorte de celle des entiers). Les *snug-motifs* sont en nombre fini : à chaque fois qu'on ajoute une nouvelle pièce dans une construction, elle ne peut se placer qu'à un nombre fini d'endroits.

Cette idée de construction progressive permet de majorer le nombre de *snug-motifs*. En voici les étapes :

motif, et certaines suites ne donnent pas un motif véritable à cause du recouvrement des pièces ou de l'utilisation (dans le choix des 12 numéros) d'un côté qui n'est plus libre. Le nombre qu'on vient de calculer est donc une majoration très large.

La question du dénombrement exact des *snug-motifs* est si difficile qu'elle est restée irrésolue jusqu'en 2004, année où R. Read a établi, à l'aide d'un programme, qu'il y en a en tout 4 842 205. Ce dénombrement est resté peu diffusé. On ne le trouve pas mentionné dans *Wikipédia* (ni en français ni en anglais) et, à ma connaissance, aucun site Internet ou livre ne le signale. Je ne pense pas non plus qu'il ait été vérifié.

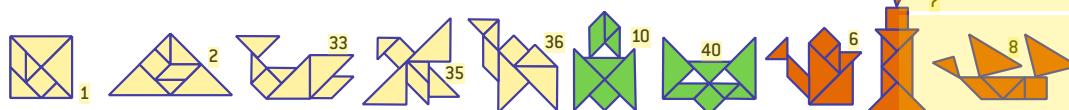
Un dernier dénombrement difficile mériterait d'être étudié soigneusement. Pour éviter les glissements, on peut considérer les motifs propres possédant la propriété que si deux bords de pièces ont un segment en commun, alors ils ont aussi une extrémité en commun.

Ces motifs *bien positionnés* (en anglais on les nomme *fully matched*) sont plus

nombreux que les *snug-motifs*. Bien sûr, tout *snug-motif* est un motif bien positionné, mais l'inverse n'est pas vrai ; par exemple, le motif 31 (voir la figure 1e) n'est pas un *snug-motif* (car certaines pièces ont un segment commun sans que les côtés des t de base s'ajustent bien), mais est un motif bien positionné au sens indiqué plus haut.

On voit facilement que dès qu'une pièce d'un motif bien positionné est en place, les sommets des autres pièces ne peuvent plus occuper qu'un nombre fini de points du plan. Il en résulte que les motifs bien positionnés sont en nombre fini. *Wikipédia* indique qu'il en existerait 6,13 millions, mais ce nombre apparaît trop faible pour être compatible avec le nombre de *snug-motifs* calculé par R. Read, et aucun nombre plus précis n'est cité. Je n'ai pas réussi à savoir si ce résultat est une évaluation approximative ou le fruit d'un calcul exact reproduit incomplètement.

En considérant la possibilité de trous dans les motifs, ce qui permet certains



que cette règle impose des contraintes d'orientation fortes à chaque pièce : si le carré est placé horizontalement, alors tous les côtés de longueur 1 ou 2 seront horizontaux ou verticaux, et tous les autres côtés (de longueur $\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$) seront sur des droites diagonales (à 45 ou à 135 degrés). Les motifs 1, 2 et 5 sont des *snug-motifs*. En revanche, les motifs 35 et 36 ne sont pas des *snug-motifs*.

Quelques questions mathématiques sur ces formes sont présentées et résolues sur la figure 2.

Dans ses articles consacrés au *Tangram*, Martin Gardner posa la question du nombre de motifs propres pentagonaux. Il proposait une solution et un raisonnement pour la justifier. Malheureusement, son raisonnement comportait une petite erreur, ce qui provoqua l'arrivée dans son courrier d'une énorme quantité de lettres de lecteurs outragés. L'analyse et la compilation de ces lettres le conduisirent à la bonne réponse, qui n'est

– À chaque étape du montage d'un motif, on accole 2 (ou plus) des 30 côtés des pièces. Côté signifie ici côté d'un des triangles élémentaires t qui composent les pièces ; ces côtés sont 30 en tout pour les sept pièces du *Tangram*. On suppose qu'on a attribué un numéro de 1 à 30 à chacun des côtés.

– Il y a six étapes de montage pour un motif, car une fois la première pièce posée, six fois de suite, on accole une des pièces restantes.

– La donnée de 12 nombres entre 1 et 30 détermine donc une construction possible au plus : les deux premiers nombres indiquent les deux côtés qu'on accole en premier, les deux nombres suivants indiquent les deux côtés qu'on accole en second, etc.

– Conclusion : il existe au plus $30^{12} = 5,3 \times 10^{17}$ *snug-motifs*.

Bien sûr, plusieurs suites de 12 numéros différents peuvent aboutir au même