

Les motifs 1, 2, 33, 35, 36 sont des motifs propres (voir l'illustration ci-dessous). Le motif 10 n'est pas un motif propre, car il possède un trou, de même que le motif 40 qui en a deux. Les motifs 6, 7 et 8 ne sont pas des motifs propres pour une autre raison : deux pièces ne se touchent que par un point et non selon un segment.

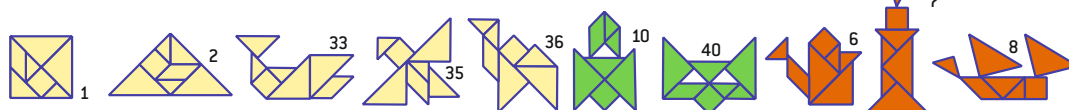
La troisième catégorie de figures à réaliser est celle des *snug-motifs* : en anglais *snug* signifie « petit et bien arrangé ». Ils sont plus contraints et utilisent l'idée que chaque pièce est composée à partir d'un même petit triangle isocèle rectangle t pris une, deux ou quatre fois. D'après la définition proposée par Ronald Read, les *snug-motifs* sont des motifs propres tels qu'en décomposant chaque pièce en triangles isocèles rectangles t , deux pièces ayant un segment en commun ont au moins un côté en commun pour deux de leurs triangles de base t (ce côté commun peut être le petit côté du triangle rectangle de base, ou son hypoténuse). On peut noter

donc pas si facile et qu'il publia. Essayez de la trouver ou faites un programme pour cela (voir la solution en figure 3).

Dénombrements manquants

Les dénombrements des trois grandes catégories de motifs du *Tangram* sont très faciles ou très difficiles. Il est bien évident que les motifs généraux et les motifs propres sont en nombre infini. Le fait de pouvoir faire pivoter certains groupes de pièces, ou d'en faire glisser continûment, rend cette infinité non dénombrable (c'est-à-dire de la même sorte que l'infinité des nombres réels, et non pas de la sorte de celle des entiers). Les *snug-motifs* sont en nombre fini : à chaque fois qu'on ajoute une nouvelle pièce dans une construction, elle ne peut se placer qu'à un nombre fini d'endroits.

Cette idée de construction progressive permet de majorer le nombre de *snug-motifs*. En voici les étapes :



que cette règle impose des contraintes d'orientation fortes à chaque pièce : si le carré est placé horizontalement, alors tous les côtés de longueur 1 ou 2 seront horizontaux ou verticaux, et tous les autres côtés (de longueur $\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$) seront sur des droites diagonales (à 45 ou à 135 degrés). Les motifs 1, 2 et 5 sont des *snug-motifs*. En revanche, les motifs 35 et 36 ne sont pas des *snug-motifs*.

Quelques questions mathématiques sur ces formes sont présentées et résolues sur la figure 2.

Dans ses articles consacrés au *Tangram*, Martin Gardner posa la question du nombre de motifs propres pentagonaux. Il proposait une solution et un raisonnement pour la justifier. Malheureusement, son raisonnement comportait une petite erreur, ce qui provoqua l'arrivée dans son courrier d'une énorme quantité de lettres de lecteurs outragés. L'analyse et la compilation de ces lettres le conduisirent à la bonne réponse, qui n'est

– À chaque étape du montage d'un motif, on accole 2 (ou plus) des 30 côtés des pièces. Côté signifie ici côté d'un des triangles élémentaires t qui composent les pièces ; ces côtés sont 30 en tout pour les sept pièces du *Tangram*. On suppose qu'on a attribué un numéro de 1 à 30 à chacun des côtés.

– Il y a six étapes de montage pour un motif, car une fois la première pièce posée, six fois de suite, on accole une des pièces restantes.

– La donnée de 12 nombres entre 1 et 30 détermine donc une construction possible au plus : les deux premiers nombres indiquent les deux côtés qu'on accole en premier, les deux nombres suivants indiquent les deux côtés qu'on accole en second, etc.

– Conclusion : il existe au plus $30^{12} = 5,3 \times 10^{17}$ *snug-motifs*.

Bien sûr, plusieurs suites de 12 numéros différents peuvent aboutir au même

motif, et certaines suites ne donnent pas un motif véritable à cause du recouvrement des pièces ou de l'utilisation (dans le choix des 12 numéros) d'un côté qui n'est plus libre. Le nombre qu'on vient de calculer est donc une majoration très large.

La question du dénombrement exact des *snug-motifs* est si difficile qu'elle est restée irrésolue jusqu'en 2004, année où R. Read a établi, à l'aide d'un programme, qu'il y en a en tout 4 842 205. Ce dénombrement est resté peu diffusé. On ne le trouve pas mentionné dans *Wikipédia* (ni en français ni en anglais) et, à ma connaissance, aucun site Internet ou livre ne le signale. Je ne pense pas non plus qu'il ait été vérifié.

Un dernier dénombrement difficile mériterait d'être étudié soigneusement. Pour éviter les glissements, on peut considérer les motifs propres possédant la propriété que si deux bords de pièces ont un segment en commun, alors ils ont aussi une extrémité en commun.

Ces motifs *bien positionnés* (en anglais on les nomme *fully matched*) sont plus nombreux que les *snug-motifs*. Bien sûr, tout *snug-motif* est un motif bien positionné, mais l'inverse n'est pas vrai ; par exemple, le motif 31 (voir la figure 1e) n'est pas un *snug-motif* (car certaines pièces ont un segment commun sans que les côtés des t de base s'ajustent bien), mais est un motif bien positionné au sens indiqué plus haut.

On voit facilement que dès qu'une pièce d'un motif bien positionné est en place, les sommets des autres pièces ne peuvent plus occuper qu'un nombre fini de points du plan. Il en résulte que les motifs bien positionnés sont en nombre fini. *Wikipédia* indique qu'il en existerait 6,13 millions, mais ce nombre apparaît trop faible pour être compatible avec le nombre de *snug-motifs* calculé par R. Read, et aucun nombre plus précis n'est cité. Je n'ai pas réussi à savoir si ce résultat est une évaluation approximative ou le fruit d'un calcul exact reproduit incomplètement.

En considérant la possibilité de trous dans les motifs, ce qui permet certains

2. Énigmes à propos du *Tangram*

A. Quel est le nombre maximal de côtés d'un motif général ?

Tout dépend de ce qu'on va considérer comme un côté du motif.

Soit on considère qu'en posant le sommet d'une pièce sur le côté d'une autre pièce, le côté sur lequel on a posé la pièce continue de compter pour 1. Dans ce cas, la réponse est 23, comme le montre le motif 1 de la femme avec les deux bras en avant : les 23 côtés des sept pièces du *Tangram* sont préservés.

Soit on considère que le côté qui reçoit le sommet compte maintenant pour 2, car en suivant la frontière du motif, on passera d'abord sur une partie du côté coupé, puis plus tard sur l'autre. Dans ce cas, la réponse est 29 ($23 + 6$), car six fois de suite, on crée un côté supplémentaire.

B. Quel est le nombre maximal de côtés d'un motif propre ?

La réponse est 23.

On s'arrange pour poser, six fois de suite, une pièce sur un côté plus grand en laissant devant un bout du côté sur lequel on pose la pièce et un autre derrière. À chaque fois, on perd un côté (celui de la pièce posée), mais on en gagne un puisque le grand côté sur lequel on a posé le petit compte maintenant deux fois :

On constate (grâce au motif 2) qu'il est effectivement possible de mener l'opération six fois de suite, et donc le nombre de 23 côtés qu'on a au départ avec les sept pièces du *Tangram* reste inchangé pour la figure achevée.

C. Quel est le nombre maximal de côtés d'un snug-motif ?

La réponse est 18. Voici le raisonnement assez subtil, dû à Ronald Read, qui le démontre.

Si on prend les sept pièces du *Tangram*, il y a en tout 30 « côtés », «côté» voulant dire ici « côté d'un

petit triangle isocèle rectangle t ». Les grands triangles isocèles rectangles t'' ont par exemple chacun un périmètre composé de six « côtés » en ce sens particulier. Quand on construit un snug-motif, à chaque fois qu'on ajoute une pièce, on accole nécessairement deux de ces 30 « côtés » au moins qui ne pourront donc plus être « côtés » du motif final.

Durant le montage du motif, on ne peut donc pas faire disparaître moins de 12 « côtés » (six fois de suite, on en fait disparaître deux). Le mieux qu'on puisse obtenir est donc un motif ayant 18 « côtés » dans le sens particulier du mot côté qu'on a adopté ici.

C'est possible, comme le motif 3 du chien le montre. Il se trouve que les 18 « côtés » dans le sens particulier de la démonstration sont chacun aussi des côtés dans le sens usuel pour ce motif du chien, et donc 18 est possible avec côté dans le sens usuel, et l'on ne peut pas faire mieux.

dessins intéressants, et pourquoi pas, de ne pas utiliser toutes les pièces, ou même de tolérer le recouvrement des pièces, il apparaît qu'une série de dénombrements concernant ce jeu pourtant universellement connu reste aujourd'hui non traitée. Quel lecteur de *Pour la Science* s'y attaquera ?

Les figures convexes

Philippe Moutou, dans une étude récente, s'est demandé s'il existait des jeux de pièces du même type que celles utilisées pour le *Tangram*, mais constituant de meilleurs jeux en un sens précis.

Dans un article publié en 1942, Fu Traing Wang démontre que parmi tous les motifs qu'on peut composer avec les pièces d'un *Tangram*, il y en a 13 exactement qui sont convexes (une figure est convexe si à chaque fois qu'on prend deux points A et B dans la figure, le segment AB est entièrement contenu dans la figure : un disque est convexe, une croix ne l'est pas).

Les motifs convexes sont les plus difficiles à réaliser à partir de leur silhouette, car celles-ci ne laissent apparaître que peu d'information sur les positions des pièces. Qu'il existe beaucoup de formes convexes différentes avec un petit nombre de pièces est donc une marque d'élégance pour ce jeu de pièces et le gage qu'on pourra faire un grand nombre de figures intéressantes et difficiles. On adoptera donc cette première mesure de qualité pour comparer les jeux de pièces du même type que le *Tangram* : le nombre de figures convexes qu'ils autorisent.

Les jeux de pièces que nous allons mettre en compétition avec le *Tangram* vont être tous ceux qui utilisent quelques pièces, chacune composée d'un ou plusieurs triangles isocèles rectangles t proprement accolés par leurs côtés (on nomme parfois ces figures *polyabolos*) et qui, au total, en comporte 16 (comme les sept pièces du

Tangram, composées en tout de 16 triangles t). On souhaite en effet que le carré soit faisable avec les pièces retenues, ce qui permettra de ranger facilement le jeu dans une boîte carrée, comme cela est possible pour le *Tangram*.

Dès 1942, Wang avait remarqué qu'avec 16 triangles isocèles rectangles, on construit non pas 13 formes convexes, mais 20. Le *Tangram* en oublie donc sept. Les sept pièces oubliées sont repérables : elles sont toutes en longueur et ne laissent pas assez d'épaisseur pour les grands triangles isocèles rectangles t'' du *Tangram* (voir la figure 4).

Les jeux proposés par divers inventeurs et fabricants de jouets pour concurrencer le *Tangram* sont le *Regulus* (5 pièces, schéma a ci-contre), le *Pythagoras* (7 pièces, b), le *Revathi* (7 pièces, c), le *Chie-no-ita* (7 pièces, d), le *Cocogram* (6 pièces, e) et le *Heptex* (7 pièces, f).

Chacun engendre un certain nombre des 20 figures convexes possibles avec 20 triangles isocèles rectangles. Le calcul du nombre de motifs convexes faisables

