

2. Énigmes à propos du *Tangram*

A. Quel est le nombre maximal de côtés d'un motif général ?

Tout dépend de ce qu'on va considérer comme un côté du motif.

Soit on considère qu'en posant le sommet d'une pièce sur le côté d'une autre pièce, le côté sur lequel on a posé la pièce continue de compter pour 1. Dans ce cas, la réponse est 23, comme le montre le motif 1 de la femme avec les deux bras en avant : les 23 côtés des sept pièces du *Tangram* sont préservés.

Soit on considère que le côté qui reçoit le sommet compte maintenant pour 2, car en suivant la frontière du motif, on passera d'abord sur une partie du côté coupé, puis plus tard sur l'autre. Dans ce cas, la réponse est 29 ($23 + 6$), car six fois de suite, on crée un côté supplémentaire.

B. Quel est le nombre maximal de côtés d'un motif propre ?

La réponse est 23.



On s'arrange pour poser, six fois de suite, une pièce sur un côté plus grand en laissant devant un bout du côté sur lequel on pose la pièce et un autre derrière. À chaque fois, on perd un côté (celui de la pièce posée), mais on en gagne un puisque le grand côté sur lequel on a posé le petit compte maintenant deux fois :

On constate (grâce au motif 2) qu'il est effectivement possible de mener l'opération six fois de suite, et donc le nombre de 23 côtés qu'on a au départ avec les sept pièces du *Tangram* reste inchangé pour la figure achevée.

C. Quel est le nombre maximal de côtés d'un snug-motif ?

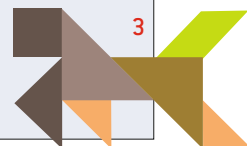
La réponse est 18. Voici le raisonnement assez subtil, dû à Ronald Read, qui le démontre.

Si on prend les sept pièces du *Tangram*, il y a en tout 30 « côtés », «côté» voulant dire ici « côté d'un

petit triangle isocèle rectangle t ». Les grands triangles isocèles rectangles t'' ont par exemple chacun un périmètre composé de six « côtés » en ce sens particulier. Quand on construit un snug-motif, à chaque fois qu'on ajoute une pièce, on accole nécessairement deux de ces 30 « côtés » au moins qui ne pourront donc plus être « côtés » du motif final.

Durant le montage du motif, on ne peut donc pas faire disparaître moins de 12 « côtés » (six fois de suite, on en fait disparaître deux). Le mieux qu'on puisse obtenir est donc un motif ayant 18 « côtés » dans le sens particulier du mot côté qu'on a adopté ici.

C'est possible, comme le motif 3 du chien le montre. Il se trouve que les 18 « côtés » dans le sens particulier de la démonstration sont chacun aussi des côtés dans le sens usuel pour ce motif du chien, et donc 18 est possible avec côté dans le sens usuel, et l'on ne peut pas faire mieux.



dessins intéressants, et pourquoi pas, de ne pas utiliser toutes les pièces, ou même de tolérer le recouvrement des pièces, il apparaît qu'une série de dénominations concernant ce jeu pourtant universellement connu reste aujourd'hui non traitée. Quel lecteur de *Pour la Science* s'y attaquera ?

Les figures convexes

Philippe Moutou, dans une étude récente, s'est demandé s'il existait des jeux de pièces du même type que celles utilisées pour le *Tangram*, mais constituant de meilleurs jeux en un sens précis.

Dans un article publié en 1942, Fu Traing Wang démontre que parmi tous les motifs qu'on peut composer avec les pièces d'un *Tangram*, il y en a 13 exactement qui sont convexes (une figure est convexe si à chaque fois qu'on prend deux points A et B dans la figure, le segment AB est entièrement contenu dans la figure : un disque est convexe, une croix ne l'est pas).



Les motifs convexes sont les plus difficiles à réaliser à partir de leur silhouette, car celles-ci ne laissent apparaître que peu d'information sur les positions des pièces. Qu'il existe beaucoup de formes convexes différentes avec un petit nombre de pièces est donc une marque d'élégance pour ce jeu de pièces et le gage qu'on pourra faire un grand nombre de figures intéressantes et difficiles. On adoptera donc cette première mesure de qualité pour comparer les jeux de pièces du même type que le *Tangram* : le nombre de figures convexes qu'ils autorisent.

Les jeux de pièces que nous allons mettre en compétition avec le *Tangram* vont être tous ceux qui utilisent quelques pièces, chacune composée d'un ou plusieurs triangles isocèles rectangles t proprement accolés par leurs côtés (on nomme parfois ces figures *polyabolos*) et qui, au total, en comporte 16 (comme les sept pièces du

Tangram, composées en tout de 16 triangles t). On souhaite en effet que le carré soit faisable avec les pièces retenues, ce qui permettra de ranger facilement le jeu dans une boîte carrée, comme cela est possible pour le *Tangram*.

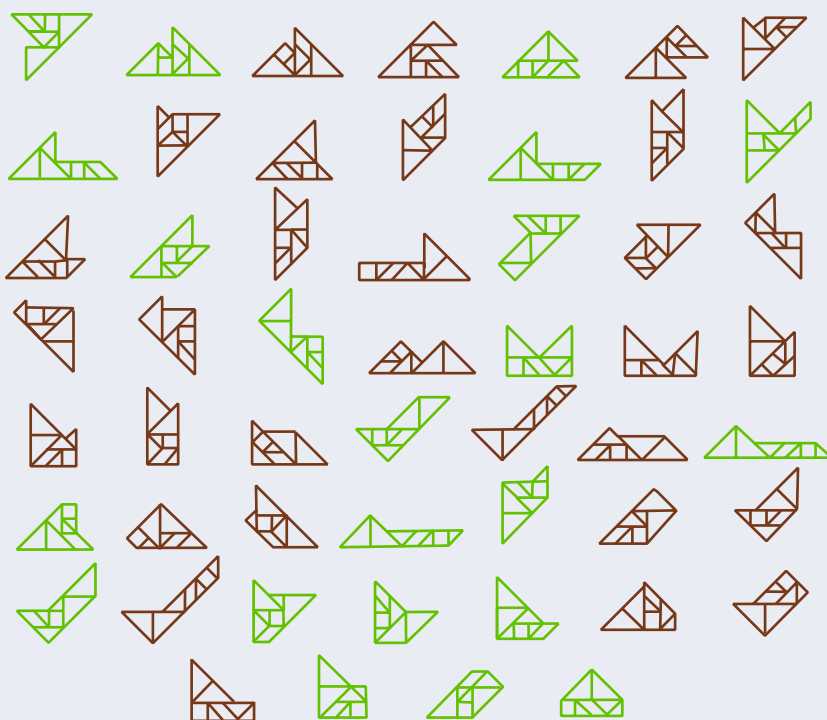
Dès 1942, Wang avait remarqué qu'avec 16 triangles isocèles rectangles, on construit non pas 13 formes convexes, mais 20. Le *Tangram* en oublie donc sept. Les sept pièces oubliées sont repérables : elles sont toutes en longueur et ne laissent pas assez d'épaisseur pour les grands triangles isocèles rectangles t'' du *Tangram* (voir la figure 4).

Les jeux proposés par divers inventeurs et fabricants de jouets pour concurrencer le *Tangram* sont le *Regulus* [5 pièces, schéma a ci-contre], le *Pythagoras* [7 pièces, b], le *Revathi* [7 pièces, c], le *Chie-no-ita* [7 pièces, d], le *Cocogram* [6 pièces, e] et le *Heptex* [7 pièces, f].

Chacun engendre un certain nombre des 20 figures convexes possibles avec 20 triangles isocèles rectangles. Le calcul du nombre de motifs convexes faisables

3. Les motifs pentagonaux de Martin Gardner

Parmi les 53 pentagones qu'on peut faire avec les sept pièces du *Tangram*, seuls 22 sont des snug-motifs (en vert). Récemment, Ph. Moutou a mis au point un programme lui ayant permis de vérifier que le *Tangram* engendrait effectivement 22 snug-motifs pentagonaux. Il a réussi à savoir de plus qu'il y a 200 snug-motifs hexagonaux, 1 245 snug-motifs heptagonaux, 6 392 snug-motifs octogonaux et 27 133 snug-motifs ennéagonaux.



4. Les motifs convexes

Les 13 figures convexes faisables avec les pièces du *Tangram* et les sept figures convexes supplémentaires obtenues avec 16 triangles isocèles rectangles.



donne les résultats suivants par ordre de succès : *Regulus* 7, *Pythagoras* 12, *Tangram* 13, *Revathi* 15, *Chie-no-ita* 16, *Cocogram* 16, *Heptex* 19.

Le *Tangram*, loin d'être le meilleur, se retrouve au milieu du classement, largement distancé par *Heptex* qui, bien que composé de sept pièces lui aussi, atteint presque le maximum avec 19 sur 20.

Le *Tangram* possède deux pièces en double. Nous dirons qu'il a deux pièces doublées. Si dans un jeu une pièce est présente trois fois, nous dirons de même qu'il y a deux pièces doublées. Avec cette terminologie, le nombre total de pièces d'un jeu est le nombre de pièces distinctes, additionné du nombre de pièces doublées.

Ph. Moutou a exploré ce paramètre pour savoir s'il était bon ou pas d'avoir beaucoup de pièces doublées. Si l'on prend sept pièces, composées au total de 16 triangles isocèles rectangles, alors le nombre de pièces doublées varie de 0 à 5 (car s'il y a 6 pièces doublées, c'est qu'une pièce unique est utilisée 7 fois, or 16 n'est pas divisible par 7, c'est impossible).

Voici le résultat : sans pièce doublée, on obtient au plus 15 formes convexes (avec le *Revathi*) ; avec une pièce doublée, on obtient au plus 16 formes convexes ; avec deux pièces doublées, on obtient au plus 19 formes convexes (*Heptex*) ; avec trois pièces doublées, on obtient au plus 19 formes convexes ; avec quatre pièces doublées, on obtient au plus 18 formes convexes ; avec cinq pièces doublées, on obtient au plus 15 formes convexes.

La conclusion est que pour avoir un jeu à sept pièces qui engendre beaucoup de formes convexes, il ne faut pas trop de pièces doublées, ni trop peu.

Un critère multiple de comparaison

La comparaison de la qualité des jeux de pièces menée en ne prenant en compte que le nombre de formes convexes qu'ils reconstituent est un peu trop sommaire.

Ph. Moutou a donc concocté un indicateur plus compliqué, mais plus subtil, qu'il a nommé le score $Z = L + A - P - D + F + C$,