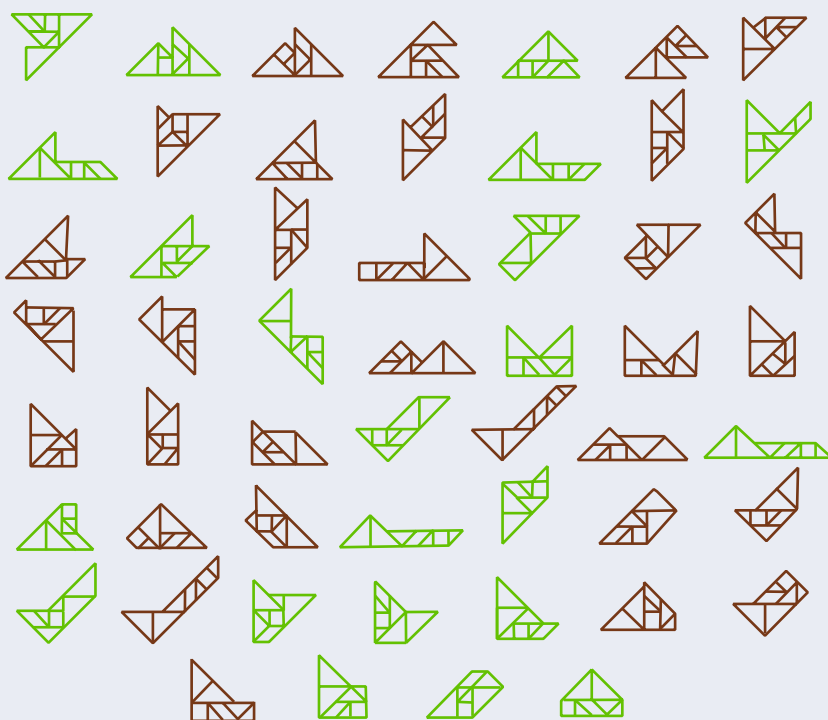


3. Les motifs pentagonaux de Martin Gardner

Parmi les 53 pentagones qu'on peut faire avec les sept pièces du *Tangram*, seuls 22 sont des snug-motifs (en vert). Récemment, Ph. Moutou a mis au point un programme lui ayant permis de vérifier que le *Tangram* engendrait effectivement 22 snug-motifs pentagonaux. Il a réussi à savoir de plus qu'il y a 200 snug-motifs hexagonaux, 1 245 snug-motifs heptagonaux, 6 392 snug-motifs octogonaux et 27 133 snug-motifs enneagonaux.



4. Les motifs convexes

Les 13 figures convexes faisables avec les pièces du *Tangram* et les sept figures convexes supplémentaires obtenues avec 16 triangles isocèles rectangles.



donne les résultats suivants par ordre de succès : *Regulus* 7, *Pythagoras* 12, *Tangram* 13, *Revathi* 15, *Chie-no-ita* 16, *Cocogram* 16, *Heptex* 19.

Le *Tangram*, loin d'être le meilleur, se retrouve au milieu du classement, largement distancé par *Heptex* qui, bien que composé de sept pièces lui aussi, atteint presque le maximum avec 19 sur 20.

Le *Tangram* possède deux pièces en double. Nous dirons qu'il a deux pièces doublées. Si dans un jeu une pièce est présente trois fois, nous dirons de même qu'il y a deux pièces doublées. Avec cette terminologie, le nombre total de pièces d'un jeu est le nombre de pièces distinctes, additionné du nombre de pièces doublées.

Ph. Moutou a exploré ce paramètre pour savoir s'il était bon ou pas d'avoir beaucoup de pièces doublées. Si l'on prend sept pièces, composées au total de 16 triangles isocèles rectangles, alors le nombre de pièces doublées varie de 0 à 5 [car s'il y a 6 pièces doublées, c'est qu'une pièce unique est utilisée 7 fois, or 16 n'est pas divisible par 7, c'est impossible].

Voici le résultat : sans pièce doublée, on obtient au plus 15 formes convexes (avec le *Revathi*) ; avec une pièce doublée, on obtient au plus 16 formes convexes ; avec deux pièces doublées, on obtient au plus 19 formes convexes (*Heptex*) ; avec trois pièces doublées, on obtient au plus 19 formes convexes ; avec quatre pièces doublées, on obtient au plus 18 formes convexes ; avec cinq pièces doublées, on obtient au plus 15 formes convexes.

La conclusion est que pour avoir un jeu à sept pièces qui engendre beaucoup de formes convexes, il ne faut pas trop de pièces doublées, ni trop peu.

Un critère multiple de comparaison

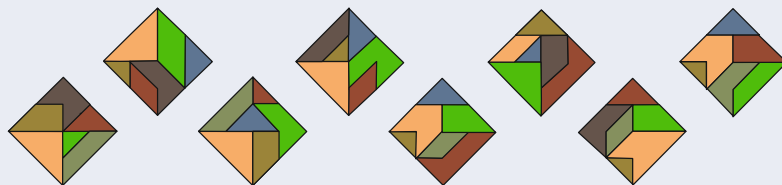
La comparaison de la qualité des jeux de pièces menée en ne prenant en compte que le nombre de formes convexes qu'ils reconstituent est un peu trop sommaire.

Ph. Moutou a donc concocté un indicateur plus compliqué, mais plus subtil, qu'il a nommé le score $Z = L + A - P - D + F + C$,

5. Les huit TAO de Philippe Moutou

En utilisant un indicateur noté Z (décrit dans le texte de l'article) plus précis que le décompte des figures convexes réalisables, Ph. Moutou a identifié huit puzzles de type *Tangram* meilleurs que ceux envisagés jusqu'à maintenant. Il les a appelés TAO (pour *Tangrams Assistés par Ordinateur*). Leur Z est égal à 19.

L'indicateur qu'il utilise prend en compte le nombre de pièces (qui ne doit pas être trop grand), la variété des formes des pièces du jeu (qui doit être grande) et le nombre de formes convexes que les pièces engendrent.



où L est le nombre de longueurs différentes des côtés des pièces du jeu (plus L est grand, plus varié est le jeu, mieux c'est) ; A est le nombre d'angles différents dans les pièces du jeu (comme pour L , plus A est grand, mieux c'est) ; P est le nombre de pièces du jeu (pour que le jeu soit élégant et intéressant, il ne faut pas que P soit grand, d'où la présence d'un signe moins devant le P) ; D est le nombre de pièces en double (il est bon de les éviter, d'où le signe moins) ; F est le nombre de formes convexes qu'on peut reconstituer avec le jeu (nous souhaitons comme précédemment que F soit grand) ; C indique si on peut faire le carré : $C = 1$ si oui, $C = 0$ si non.

Bien sûr, ce coefficient aurait pu être conçu autrement, par exemple en accordant plus de poids à l'un des termes, disons F , et en le remplaçant par $2F$ dans la formule qui définit Z : $Z' = L + A - P - D + 2F + C$.

Aussi imparfait et discutable qu'il soit, le coefficient Z de Ph. Moutou est un bon moyen de comparaison et peut-être de découverte de nouveaux jeux intéressants. Ph. Moutou a calculé Z pour les jeux possibles ayant 16 triangles isocèles rectangles au total. Les résultats font ressortir les puzzles classiques déjà mentionnés qui se trouvent tous assez bien classés. Les valeurs de Z sont 12 pour *Tangram*, 10 pour *Pythagoras*, 16 pour *Chie-no-ita*, 17 pour *Heptex* et 17 pour *Revathi*. Plus intéressants encore, les résultats de l'évaluation de Z ont fait apparaître huit puzzles pas-

sés inaperçus jusqu'à présent et qui sont les gagnants avec un score Z de 19. Ph. Moutou a choisi de nommer TAO (pour *Tangram Assisté par Ordinateur*) ces puzzles (voir la figure 5).

Aller plus loin

En considérant un total de triangles de base plus grand, on peut obtenir des valeurs de Z de plus en plus grandes. Il semble que Z puisse croître jusqu'à l'infini et c'est la conjecture que formule Ph. Moutou. D'intéressants jeux, plus complexes que le *Tangram*, ont ainsi été découverts ; je vous invite à aller les voir sur son site Internet.

D'autres travaux se poursuivent pour perfectionner Z et prendre en compte la capacité d'un jeu de pièces à engendrer des figures symétriques, ou d'autres aspects d'un jeu de pièces.

Ces recherches, intéressantes, butent sur la difficulté de calculer le nombre de snug-motifs engendrés par un jeu, ou le nombre de motifs bien positionnés, nombres importants pour évaluer si un jeu est intéressant ou non. Les comparaisons des jeux de pièces différents basés sur le calcul de ces nombres difficiles à obtenir pourraient confirmer les résultats déjà obtenus en se fondant sur les motifs convexes, ou alors faire découvrir le *Tangram* ultime qui, pour 4 000 ans encore, occupera les esprits des écoliers et des amateurs de divertissements géométriques. ■

✓ BIBLIOGRAPHIE

Ph. Moutou, *Puzzles de la famille Tangram*, 2010 : <http://ph.moutou.free.fr/Mathadomicile/Puzzles/puzzles.html>

R. C. Read, *The snug tangram number and some other contributions to the corpus of mathematical trivia*, *Bull. Inst. Comb. Appl.*, vol. 40, pp. 31-39, 2004.

J. Slocum, *The Tao of Tangram*, Barnes & Noble, 2001.

J. Botermans *et al.*, *The World of Games : Their Origins and History, How to Play Them, and How to Make Them*, Facts on File, 1989.

M. Gardner, *Mathematical Games - On the fanciful history and the creative challenges of the puzzle game of Tangrams*, *Scientific American*, pp. 98-103, août 1974.

M. Gardner, *More on Tangrams*, *Scientific American*, pp. 187-191, septembre 1974.

S. Loyd, *Sam Loyd's Book of Tangram Puzzles. The 8th Book of Tan*, 1903. Nouvelle édition, Dover Publications, 1968.

F. T. Wang, *A Theorem on the Tangram*, *The American Mathematical Monthly*, vol. 49(9), pp. 596-599, 1942.

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

 ART & SCIENCE

Les harenguiers de Delft

Dans sa Vue de Delft, Vermeer témoigne du refroidissement du climat européen au XVII^e siècle. L'une des conséquences du phénomène fut la migration des bancs de harengs vers la mer Baltique et les côtes hollandaises.

Loïc MANGIN

Du peintre hollandais Johannes Vermeer (1632-1675), 35 toiles nous sont parvenues (une 36^e, volée à Boston en 1990, n'a pas été retrouvée). La plupart représentent des intérieurs, mais deux sont des vues extérieures. Parmi elles, la *Vue de Delft* (voir page ci-contre), conservée au musée Mautishuis, à La Haye, est sa seule représentation d'un grand espace. Qu'y voit-on ?

Pour peindre, l'artiste s'est installé à l'intérieur de la ville hollandaise de Delft (entre Rotterdam et La Haye), là où il vivait, au Sud, près du port fluvial. De l'autre côté du plan d'eau, on distingue deux portes (celle de Schiedam et celle de Rotterdam, aujourd'hui disparues) édifiées de part et d'autre de l'embouchure de l'Oude Kola, un canal qui rejoint la rivière Kola. L'absence de cloches dans le clocher de la Nouvelle Église, éclairée par le soleil, indique que le tableau a été peint avant leur installation en mai 1660.

Dans le port, plusieurs embarcations sont stationnées. Les bateaux quittaient Delft et y arrivaient *via* le canal de la Schie qui coule en direction du Sud vers Schiedam et Rotterdam, où les navires rejoignent le Rhin. Au premier plan à gauche, une barge à passagers attend d'être halée par des chevaux vers des villes du Sud de la Hollande. D'autres bateaux se trouvent au pied des murs de la cité.

Plus étonnantes sont les deux barges à large fond amarrées côte à côte à droite du tableau, là où se trouvait le chantier naval de Delft. Les mâts arrière sont absents tandis que ceux de l'avant sont partiellement démontés, trahissant une période de ré-

paration des bâtiments. Pourquoi ces embarcations sont-elles inattendues ? Parce qu'il s'agit de harenguiers, des trois mâts destinés à la pêche en mer du Nord ! Ces bateaux sont une illustration du Petit Âge glaciaire, une période de refroidissement du climat qui a frappé l'Europe et le monde au moins depuis le milieu du XVI^e siècle jusqu'à la fin du XIX^e, les dates ne faisant pas consensus.

Ces années, qui succédèrent à l'optimum climatique médiéval (un réchauffe-

**Grâce aux revenus
de la pêche aux harengs,
la Hollande
put se consacrer
au commerce maritime.**

ment), correspondent à de longues séries d'hivers froids. D'ailleurs, le Petit Âge glaciaire est visible dans de nombreuses toiles d'artistes du Nord de l'Europe, tel Pieter Bruegel l'Ancien, qui peignit son premier paysage hivernal en 1565 : on y voit des chasseurs dans la neige et des individus évoluant sur la glace. Ce type de représentations était rare avant 1550.

Signe de ces temps glacés, Vermeer lui-même succomba aux plaisirs de la glisse en achetant – très cher – un char à voile à patins en 1660. Toutefois, le gel épargna les canaux hollandais les deux hivers suivants !

Plusieurs hypothèses ont été proposées pour expliquer ce refroidissement et sa durée. La première, fondée sur des travaux en stratigraphie, l'associe, notamment au début du XIX^e siècle, à l'éruption violente de plusieurs volcans, dont le Tambora, sur l'île de Sumbawa, en Indonésie. Les cendres et les poussières auraient alors diminué le rayonnement solaire traversant l'atmosphère. Une autre hypothèse relie le Petit Âge glaciaire à l'activité solaire, celle-ci ayant été notablement ralentie durant une grande partie de cette période. Enfin, certains incriminent une anomalie du *Gulf Stream*, le courant qui traverse l'Atlantique et apporte de la chaleur vers l'Europe.

Quel est le rapport entre le Petit Âge glaciaire et les harengs ? Le refroidissement a entraîné une extension des glaces arctiques vers le Sud, se traduisant par de longues périodes de gel le long des côtes de la Norvège, pays qui dominait alors la pêche au hareng. En conséquence, les bancs de poissons ont migré vers la mer Baltique et se sont rapprochés des côtes de la Hollande. Les pêcheurs se sont adaptés à cette nouvelle activité, ce qui explique la présence des harenguiers dans le port de Delft au milieu du XVII^e siècle.

Selon un spécialiste de l'histoire du climat, la prospérité des Pays-Bas doit beaucoup à ce transfert halieutique. Grâce aux considérables revenus de la pêche au hareng, la Hollande put se consacrer à d'autres entreprises, notamment en investissant dans la navigation et dans le commerce maritime. On en voit d'ailleurs un témoignage sur la *Vue de Delft*.