

HISTOIRE DES SCIENCES

Un théorème géométrique parmi les *Pensées* de Pascal

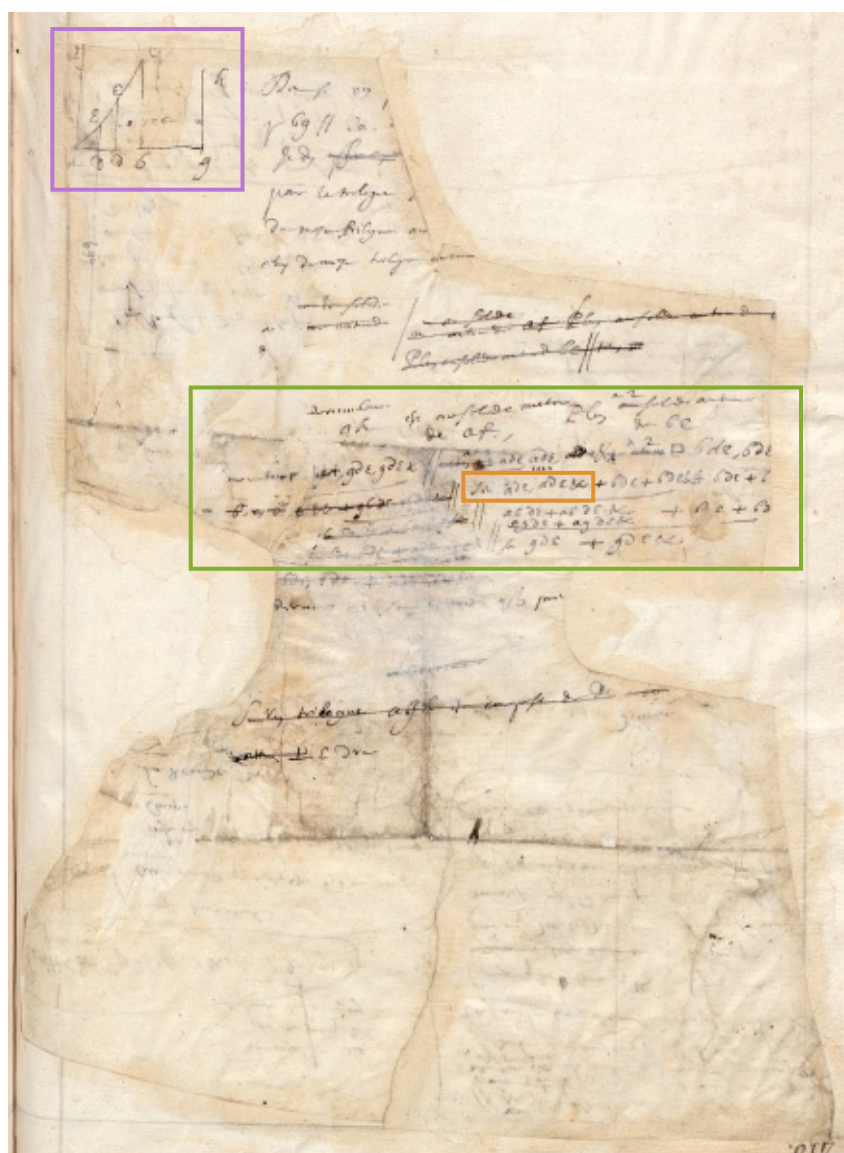


Des notes de géométrie de Pascal ont été retrouvées au verso d'un feuillet des Pensées, révélant les coulisses d'un de ses ouvrages mathématiques, les Lettres de A. Dettonville.

Dominique DESCOTES

L'œuvre mathématique de Blaise Pascal (1623-1662) ne nous est connue que de manière partielle. Rien ne subsiste des manuscrits originaux de son grand traité sur les coniques – intersections d'un plan et d'un cône – ni de sa correspondance avec Pierre Fermat sur la « géométrie du hasard », réflexions sur les jeux de hasard qui annoncent le calcul des probabilités. Surtout, les manuscrits de ses ouvrages imprimés au XVII^e siècle, le *Traité du triangle arithmétique* et les *Lettres de A. Dettonville*, ont été détruits. Dans le premier, Pascal étudie les propriétés du triangle arithmétique, organisation des nombres entiers en triangle rectangle qui facilite le calcul de sommes de suites d'entiers ; le second est en partie consacré à la cycloïde, une courbe décrite par un point fixé au bord d'une roue lorsque celle-ci roule sans glisser le long d'une droite (voir la figure 2). Comme la plupart des traités mathématiques de l'époque, ces deux ouvrages ne nous offrent qu'un produit pour ainsi dire achevé : ils sont entièrement rédigés sous forme rhétorique, voire littéraire. Jusqu'à présent, faute de tout manuscrit original autographe, nous ne disposons d'aucune trace de la manière dont Pascal préparait son texte, et on admettait couramment qu'il n'avait jamais employé d'écriture symbolique, de quelque type qu'elle soit.

Paradoxalement, c'est le *Recueil* des manuscrits originaux des *Pensées* de Pascal, déposé à la Bibliothèque nationale de France, et surtout connu parce qu'il contient les grands textes religieux et moraux de Pas-



cal, qui a permis de lever un pan du voile qui couvre les méthodes de rédaction de notre géomètre. Le *Recueil des Pensées* se présente comme un gros volume relié, sur les feuillets duquel ont été collés les papiers autographes de Pascal, retrouvés après sa mort. Les travaux en cours depuis une dizaine d'années sur ce document en vue de la réalisation d'une édition électronique des *Pensées* m'ont amené à remarquer, parmi les 496 pages du gros volume, un autographe négligé, malgré son intérêt considérable pour l'histoire des sciences.

Le document ne doit d'avoir été préservé qu'au fait qu'il porte au recto, page 409, des notes elliptiques prises en vue de la rédaction des *Provinciales*. Publiées en 1656-1657, ces lettres écrites « à un provincial par un de ses amis » visaient à défendre le théologien augustinien Antoine Arnauld, qu'une machination conduite par les ennemis du monastère de Port-Royal (monas-

L'AUTEUR



Dominique DESCOTES, professeur à l'Université Blaise Pascal (Clermont II), est chercheur au Centre international Blaise Pascal (CERHAC-CIBP, UMR 5037, CNRS-Université Blaise Pascal).

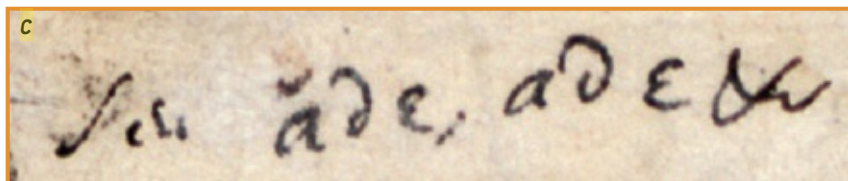
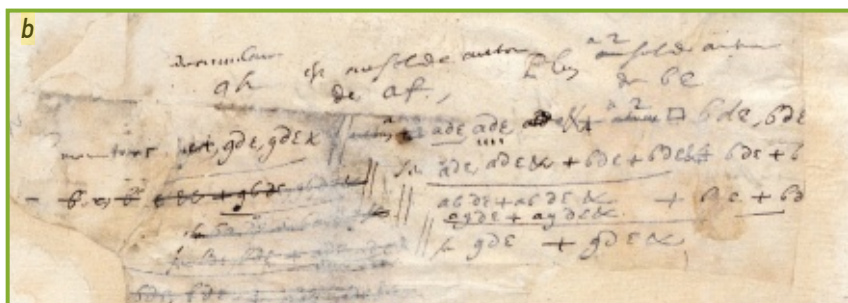
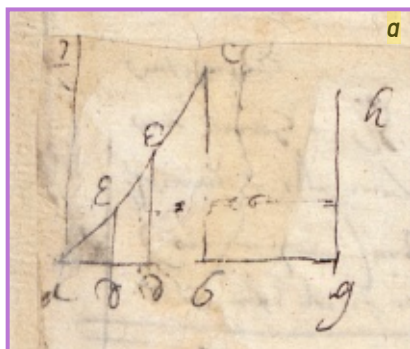
tère de la haute vallée de Chevreuse où se sont rassemblés les disciples de saint Augustin) avait privé de son titre de docteur de Sorbonne. Pascal avait griffonné les notes de la page 409 du *Recueil des Pensées* sur un papier de réutilisation, mais il n'avait pas eu l'occasion de les exploiter dans la composition d'un ouvrage, et il avait par conséquent conservé le document. Or au verso, sur la page 410 du *Recueil*, apparaît, à travers une fenêtre découpée dans la feuille du cahier, le brouillon autographe d'une proposition de géométrie qui a jusqu'à présent complètement échappé aux éditeurs des *Pensées*, et n'a par conséquent fait l'objet d'aucune publication.

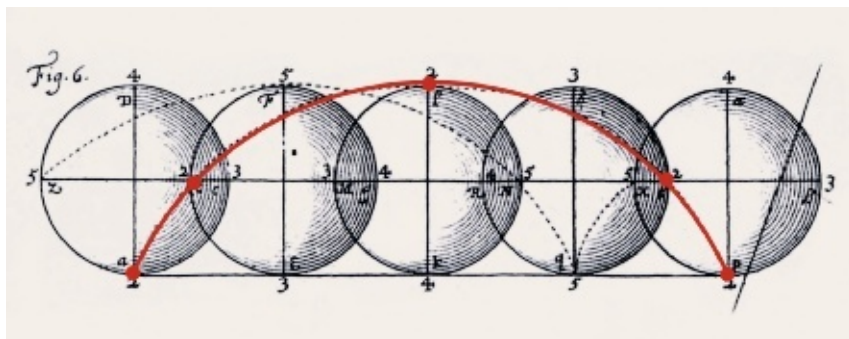
Au dos d'un brouillon des *Provinciales*

Le document a, en quelque sorte, été victime de la séparation des disciplines qui caractérise la recherche et l'enseignement en France : préoccupés avant tout de déchiffrer les textes d'ordre apologétique et religieux, les éditeurs des *Pensées* n'ont pas jugé cette page digne d'être reproduite et, de leur côté, les historiens des sciences n'ont jamais eu l'idée d'aller chercher une proposition de géométrie dans les brouillons de l'*Apologie de la religion chrétienne*. Placé sous les yeux de tout le monde et jamais regardé, le théorème attendait vainement qu'on s'aperçoive de son existence depuis le XVIII^e siècle...

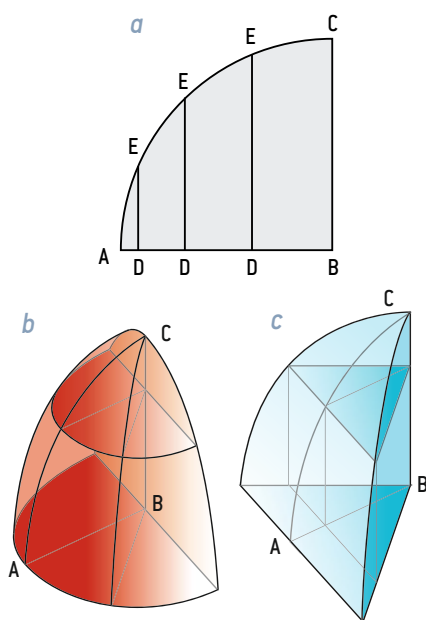
La page 409 permet de dater approximativement la partie mathématique qui figure au verso : la campagne des *Provinciales* a lieu de début 1656 à 1657. Or le brouillon du verso est antérieur (il est mutilé par un découpage de Pascal lui-même, alors que le texte au recto est épargné). Il doit donc remonter à 1655 ou 1656. À cette époque, Pascal a une activité intense de polémiste contre les jésuites qui attaquent les disciples de saint Augustin ; il commence aussi à élaborer son *Apologie de la religion chrétienne*, dont nous connaissons les fragments sous le titre de *Pensées*. Il n'abandonne cependant pas les sciences pour autant : en 1654, il a fait imprimer son *Traité du triangle arithmétique* et des ouvrages de physique, et, en juin 1658, il proposera

1. LE MANUSCRIT DE GÉOMÉTRIE découvert au dos d'un feuillet des *Pensées* de Pascal (page ci-contre). Le savant y étudie le volume engendré par la rotation d'un triligne abc autour d'un axe gh (a). Très brouillon et abîmé, le manuscrit énonce un théorème dans une notation symbolique (b). Les traits horizontaux, par exemple, séparent les étapes du raisonnement, et les doubles barres verticales représentent l'égalité entre des sommes. Pour indiquer la somme de tous les trilignes ade qui composent le triligne abc , notamment, Pascal utilise le symbole S (c). Le calcul intégral n'est plus très loin...





2. LE DÉFI DE LA ROULETTE consistait à étudier les propriétés de la cycloïde (en rouge), courbe décrite par un point fixé à une roue, lorsque celle-ci roule le long d'une droite horizontale. Il s'agissait notamment de déterminer les caractéristiques du solide engendré par la rotation de la courbe autour de son axe de symétrie, notamment son volume, sa surface courbe et son centre de gravité. Pascal lança ce concours en 1658 par circulaire, avec une récompense de 60 pistoles – l'équivalent du loyer annuel d'une maison à Paris. Publiées en 1659, les *Lettres de A. Dettonville* sont la solution que propose Pascal, sous un pseudonyme, à ce défi.



3. POUR CALCULER LE VOLUME du solide engendré par un triline ABC (a) tournant autour de son axe BC (b), Pascal construit un autre solide, l'« ongle », qui épouse lui aussi la forme du triline, mais dont la base est un triangle rectangle isocèle de bissectrice AB (c). En sommant les tranches d'onglet parallèles à cette base (des triangles rectangles isocèles elles aussi), Pascal détermine le volume de l'onglet. Connaissant par ailleurs le rapport des volumes des deux solides (c'est le rapport des surfaces de leurs bases), il en déduit le volume du premier solide. Le théorème du manuscrit généralise cette méthode à d'autres solides engendrés par diverses rotations d'un triline.

publiquement un concours à tous les mathématiciens d'Europe, les défiant de résoudre une liste de problèmes sur la roulette, c'est-à-dire sur la courbe qu'elle engendre – la cycloïde. En octobre, personne n'ayant complètement satisfait au défi, il publiera ses résultats sous le titre de *Lettres de A. Dettonville*.

Un théorème sur le calcul de volumes

Le brouillon mathématique qui nous intéresse, page 410 du *Recueil des Pensées*, est lié à ces travaux. Placé tête-bêche, il n'est visible que parce que les ouvriers qui, au XVIII^e siècle, ont confectionné le *Recueil* des originaux, ont percé dans le folio une fenêtre qui permet de voir le côté du papier collé sur le feuillet support (voir la figure 1).

De quoi est-il question dans ce document ? D'abord, on constate que, contrairement aux textes imprimés, il est écrit sous forme symbolique, et non rhétorique : c'est la preuve que Pascal possédait son propre symbolisme. Celui-ci n'a rien à voir avec le nôtre ni avec celui de l'algèbre cartésienne. Les larges coups de plume horizontaux qui séparent les différentes expressions du raisonnement, par exemple (voir la figure 1b), ne sont pas des barres de rapports : elles séparent les temps successifs du raisonnement, et les transformations des expressions symboliques. Les doubles barres obliques symbolisent l'éga-

lité entre des sommes de corps géométriques. Ensuite, Pascal y traite, dans un langage qui est celui de la *méthode des indivisibles*, ancêtre de ce qui deviendra le calcul différentiel et intégral, de corps géométriques qu'il étudiera dans les *Lettres de A. Dettonville*. Si elles ont été rédigées pour apporter une solution au « défi de la roulette », ces lettres ont en effet une portée bien plus vaste : Pascal y propose des méthodes générales de calcul de la dimension et des centres de gravité des solides et des surfaces planes et courbes.

La figure tracée sur le document (voir la figure 1a) représente ce qu'il appelle un *triline*, la surface limitée par deux droites perpendiculaires et une ligne courbe monotone. Un des problèmes du défi de la roulette est la détermination du volume sous la cycloïde, lorsque celle-ci tourne autour de son axe de symétrie. Dans les *Lettres de A. Dettonville*, pour résoudre ce problème, Pascal part du cas général d'un triline ABC quelconque (voir la figure 3). Tourné autour de son axe BC, celui-ci engendre un demi-solide de rotation, dont il cherche le volume, la surface courbe et le centre de gravité. Il le compare pour cela à un autre solide, l'« ongle », construit sur le même triline, mais de volume plus simple à calculer.

L'originalité du théorème dont Pascal donne ici la démonstration, c'est qu'il concerne des solides un peu différents, tel celui construit par rotation du triline ABC autour de la parallèle à BC passant par A (voir la figure 1a). Le théorème de Pascal, démontré sous sa forme rhétorique dans les *Lettres de A. Dettonville*, donne le volume de ce solide en le comparant à celui engendré par la rotation du triline ABC autour de GH, parallèle à l'axe BC et perpendiculaire à la base AB du triline.

Une notation autre que celle de Descartes

Mais le plus nouveau est le système symbolique utilisé. Pour désigner une somme indéfinie de lignes ou de surfaces (l'ancêtre de ce que nous appelons une intégrale), par exemple pour désigner la « somme » de « tous les trilignes ADE », Pascal emploie le symbole S suivi de « des », et des lettres qui désignent les éléments sommés (voir la figure 1c).