

4. Le graphe du cube de Rubik

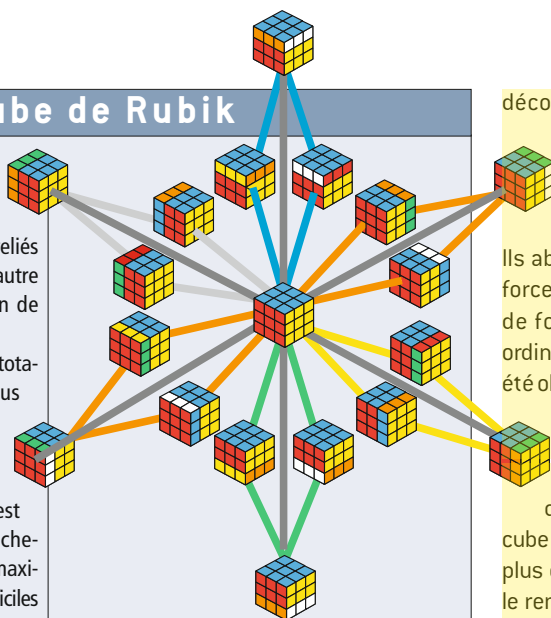
On associe au cube de Rubik le graphe de toutes ses configurations. Les nœuds du graphe sont les $4,3 \times 10^{19}$ configurations possibles et deux nœuds sont reliés par un arc si l'on peut passer de l'un à l'autre en opérant un mouvement de rotation de l'une des faces du cube.

Ce graphe, impossible à dessiner en totalité, est extrêmement symétrique, car tous les nœuds sont équivalents comme c'est le cas par exemple du graphe des sommets d'un cube. Trouver les meilleures suites de mouvements pour résoudre le cube est équivalent à rechercher les plus courts chemins dans ce graphe. Trouver le nombre maximum de mouvements qu'exigent les plus difficiles des configurations est équivalent à rechercher les configurations les plus éloignées de la configuration initiale, ce qui, à cause de la symétrie du graphe, revient à trouver le diamètre du graphe (la distance maximale séparant deux nœuds du graphe).

Les algorithmes généraux de calcul dans un graphe (calcul de plus court chemin, calcul de diamètre, etc.) ne peuvent pas s'appliquer directement à cause de la taille du graphe, et cela même en utilisant de puissants réseaux d'ordinateurs. Le diamètre du graphe a été calculé en adaptant ces méthodes et en exploitant au mieux les propriétés particulières du graphe.

L'une des idées utilisées par les chercheurs est la suivante. Pour connaître un court chemin entre deux positions A et B, on peut choisir une configuration C pas trop loin de A, puis rechercher le plus court chemin entre A et C et le plus court chemin entre C et B. La mise bout à bout des deux plus courts chemins ne conduit pas toujours au plus court chemin entre A et B, mais elle en donne un assez bon. De plus, si on fait varier C, cela permet presque à coup sûr de découvrir le plus court chemin entre A et B.

Le problème du diamètre du graphe du cube de Rubik est étudié depuis 30 ans et les progrès ont été lents jusqu'à la démonstration en juillet 2010 que le diamètre est 20. Pour mesurer les progrès, voyons la date, le nom du prouveur et le diamètre entre parenthèses : juillet 1981, Morwen Thistlethwaite (52) ; avril 1993, Hans Kloosterman (42) ; mai 1992, Michael Reid (39) ; mai 1992, Dik Winter (37) ; janvier 1995, Michael Reid (inférieur à 29 et supérieur à 20) ; décembre 1995, Silviu Radu (28) ; avril 2006, Sil-



Début de l'immense graphe des configurations du cube de Rubik.

viu Radu (27) ; mai 2007, Dan Kunkle (26) ; mars 2008, Tomas Rokicki (23) ; août 2008, Tomas Rokicki (22) ; juillet 2010, Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson et John Dethridge prouvent enfin que le diamètre est 20.

Le tableau suivant (obtenu à l'occasion du dernier résultat) indique le nombre de nœuds du graphe ayant une distance donnée à la configuration initiale. Les dernières lignes du tableau sont des valeurs approchées en cours de calcul.

0	1
1	18
2	243
3	3 240
4	43 239
5	574 908
6	7 618 438
7	100 803 036
8	1 332 343 288
9	17 596 479 795
10	232 248 063 316
11	3 063 288 809 012
12	40 374 425 656 248
13	531 653 418 284 628
14	6 989 320 578 825 358
15	91 365 146 187 124 313
16 environ	1 100 000 000 000 000 000
17 environ	12 000 000 000 000 000 000
18 environ	29 000 000 000 000 000 000
19 environ	1 500 000 000 000 000 000
20 environ	300 000 000

décompositions, etc. Il n'en a rien été, la théorie pure s'est révélée inopérante !

La réponse, 20, n'a été obtenue qu'à l'issue d'une série de progrès algorithmiques s'étalant sur 20 ans. Ils aboutissent grâce à l'utilisation d'une force de calcul équivalente à 35 années de fonctionnement ininterrompu d'un ordinateur de bureau. Ce temps de calcul a été obtenu en mobilisant un ensemble d'ordinateurs prêtés par le géant Google pendant quelques semaines.

Le nombre de configurations qu'on peut obtenir en mélangeant le cube est de 43 milliards de milliards. Si en plus de le manipuler, vous le démontez et le remontez sans prendre de précautions, il y a 12 fois plus de configurations et vous n'aurez donc qu'une chance sur 12 de pouvoir le remettre en ordre. Cette propriété du cube est analogue à celle du Taquin : en démontant un Taquin et en remplaçant les pièces sans précaution, vous n'avez qu'une chance sur deux de pouvoir revenir à la position initiale.

On peut s'occuper une à une des $4,3 \times 10^{19}$ configurations possibles, en recherchant à chaque fois la meilleure suite de mouvements pour l'atteindre. Trouver la suite la plus courte de mouvements pour ranger une position donnée est aujourd'hui possible grâce aux bons algorithmes mis au point par Herbert Kociemba, qui travaille sur la question depuis 1992. Pour une position donnée, il faut souvent plusieurs secondes, même avec une machine puissante, pour identifier la suite optimale de mouvements. La recherche de la pire configuration du cube de Rubik que nous obtiendrions en calculant, pour chaque configuration, la séquence optimale de mouvements avec un algorithme traitant une configuration par seconde, exigerait donc de mobiliser pendant plus de 1 300 ans le milliard d'ordinateurs qu'il y a sur Terre aujourd'hui. La méthode brutale n'est pas en mesure de donner la réponse.

Une autre idée consiste à procéder progressivement en mémorisant ce qu'on obtient et en le réutilisant. On regarde toutes les configurations qu'on atteint en un mouvement (il y en a 18) et on mémorise leur liste avec

l'information qu'elles sont atteignables en un mouvement. Partant de ces configurations, on opère un mouvement de plus de toutes les façons possibles. On mémorise les configurations nouvelles qu'on vient d'atteindre avec l'information qu'elles sont atteignables en deux mouvements.

On poursuit de la même façon et, de proche en proche, toutes les configurations possibles se trouvent mémorisées avec l'information de la longueur du plus court chemin qui permet d'y arriver (car quand on engendre une configuration pour la première fois, c'est qu'il n'y a pas de suites de mouvements plus courtes y conduisant). Quand une étape nouvelle de calcul n'ajoute plus de configuration, on arrête l'algorithme : on est certain d'avoir toutes les longueurs des plus courts chemins et on connaît donc les configurations du cube de Rubik les plus longues à ranger.

En théorie, cette approche est bien plus rapide que la précédente, car elle exploite au mieux les résultats des calculs déjà faits qu'elle engrange petit à petit. Mais elle est toute aussi impossible à cause de la quantité de mémoire bien trop importante qu'elle exige. C'est la totalité de la mémoire de tous les disques durs des ordinateurs sur Terre, de l'ordre de 10^{21} octets, qu'il faudrait utiliser pour exécuter l'algorithme de calcul progressif de tous les plus courts chemins que nous venons de décrire !

Un exploit algorithmique

Entre trop de calculs et trop de mémoires, il fallait trouver une solution médiane. Tomas Rokicki, H. Kociemba, Morley Davidson et John Dethridge ont su faire ce travail et démontrer que 20 est le nombre de mouvements nécessaires pour ranger le cube de Rubik dans les cas les plus difficiles. La méthode résulte d'une longue recherche et de la mise au point d'une série de perfectionnements pour apprivoiser la complexité du problème et exploiter à la fois la mémoire disponible sur une machine contemporaine et la capacité de calcul qu'elle donne, en s'arrangeant pour ne jamais dépasser les bornes que la technologie fixe aujourd'hui.

Outre l'utilisation des symétries du problème qui permet d'en réduire un peu la taille, l'idée a été de séparer le problème en un grand nombre de sous-problèmes que la mémoire disponible sur un ordinateur permet de traiter globalement par une méthode apparentée à celle progressive évoquée. Le problème a ainsi été découpé en 2 217 093 120 ensembles de 19 508 428 800 configurations chacun. L'utilisation des symétries a ramené le nombre d'ensembles à traiter à 55 882 296.

Une variante de l'algorithme de H. Kociemba exploite l'information que le pire cas ne demande pas moins de 20 mouvements. On sait depuis 1995 que certaines configurations ne peuvent être résolues en moins de 20 mouvements, et donc, dès que pour une configuration donnée, on connaît une solution en moins de 20 mouvements, et même si ce n'est pas la meilleure, on peut se dispenser d'en rechercher une plus courte.

Le long calcul mené pour arriver au résultat que 20 mouvements, même dans le pire cas, suffisent à remettre en ordre un cube de Rubik, a produit d'autres informations intéressantes. En moyenne, le nombre de mouvements nécessaires est 17,7. Les configurations exigeant 20 mouvements sont assez rares : il y en a environ 300 millions, ce qui signifie qu'une configuration prise au hasard a moins d'une chance sur 100 milliards de nécessiter 20 mouvements. Ces informations font maintenant comprendre que les joueurs humains qui réussissent en 22 mouvements réalisent un exploit pas très lointain de l'optimum, chose remarquable. Cependant, malgré tous leurs efforts et tous les entraînements auxquels les joueurs humains se soumettent, ils ne réussissent pas à découvrir les meilleures séquences de mouvements.

Ainsi, ce jeu inventé il y a plus de 30 ans a défié le monde des informaticiens qui n'ont pu que difficilement résoudre le problème de la pire configuration. Le jeu défie aussi la communauté des mathématiciens qui, sur une question simple purement algébrique et abstraite, a dû, pour l'instant, laisser la machine l'emporter en proposant un résultat qu'aucun théoricien ne peut contredire ni valider à la main.

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

J. Slocum, *The Cube. The Ultimate Guide to the World's Bestselling Puzzle*, Black Dog & Leventhal Publisher Inc., 2009.

T. Rokicki, *Twenty-two moves suffices for the Rubik's cube*, *The Mathematical Intelligencer*, vol.32(1), pp.33-40, 2010. <http://www.springerlink.com/content/q088143tn805k124/fulltext.pdf>

D. Joyner, *Adventures in Group Theory : Rubik's Cube, Merlin's Magic and Other Mathematical Toys*, The Johns Hopkins University Press, 2008.

SUR LE WEB

T. Rokicki et al., *God's Number is 20* [consulté le 11-11-2010], <http://www.cube20.org/>

Cubeland : <http://cubeland.free.fr/indexfr.html>

Francocube : <http://www.francocube.com>

Site officiel du cube de Rubik : <http://www.rubiks.com/>

World Cube Association : <http://www.worldcubeassociation.org/index.php>

Wikipedia : *Optimal solutions for Rubik's Cube* http://en.wikipedia.org/wiki/Optimal_solutions_for_Rubik's_Cube