

DOSSIER POUR LA SCIENCE

- L'Univers avant le Big Bang
- Où est passée l'antimatière ?
- Matière noire et énergie sombre
- Comment finira l'Univers ?

N° 71 Avril-Juin 2011

Le magazine thématique de l'actualité scientifique

La face cachée de l'Univers

Comment explorer
les âges sombres
et le contenu manquant ?

120 pages - prix de vente : 6,95 €

À découvrir en kiosque
et sur www.pourlascience.fr

TURBULENCES sur les équations des fluides

L'un des problèmes mathématiques les plus en vue porte sur les écoulements des liquides ou des gaz. Les équations dites de Navier-Stokes utilisées pour les décrire et les prévoir sont-elles valides ?

Thomas Sonar

A l'occasion du passage au nouveau millénaire, en l'an 2000, le *Clay Mathematical Institute*, une fondation américaine privée, a proposé une liste de sept problèmes dont la résolution sera récompensée d'un prix de un million de dollars pour chacun. La plupart de ces défis sont d'une grande abstraction et peuvent sembler éloignés de toute réalité physique. Par contraste, au sein de cette liste, le problème des équations de Navier-Stokes apparaît bien concret : ces équations sont censées décrire les écoulements des fluides (liquides ou gaz) ordinaires.

Afin de déterminer comment un fluide se comporte dans une situation donnée, on peut réaliser des expériences. Mais en pratique, c'est souvent trop difficile ou trop coûteux. Dans ce cas, il est possible de s'appuyer sur des simulations numériques, par ordinateur, des équations qui régissent les écoulements. C'est ainsi que les ingénieurs-architectes calculent le comportement des grandes structures, tels



1. LA TURBULENCE DES FLUIDES est un phénomène mal compris. Cette incompréhension reflète les difficultés que posent les équations de Navier-Stokes, tant sur le plan de leur analyse mathématique que sur celui de leur simulation numérique.

les ponts ou les gratte-ciel, sous l'action du vent. La simulation numérique permet aussi de déterminer les caractéristiques aérodynamiques d'une automobile, d'un train à grande vitesse ou d'un avion, sans avoir à construire au préalable des prototypes de ces appareils et à les tester dans une soufflerie.

La simulation numérique en mécanique des fluides est fondée sur une stratégie de résolution approchée des équations de Navier-Stokes. Ces équations, qui se révèlent donc cruciales pour les activités des constructeurs automobiles ou des bureaux d'ingénieurs, s'invitent même à Hollywood afin, par exemple, de simuler le tourbillon où s'enfonce le *Titanic* lors de son naufrage.

L'existence et l'unicité des solutions sont à prouver

La résolution des équations de Navier-Stokes joue donc un rôle important, qu'il s'agisse de science ou de technologie. Pourquoi ces équations figurent-elles sur la liste des « problèmes du millénaire » ? Des équations dont des programmes informatiques calculent des solutions approchées présentent-elles encore un réel intérêt pour les mathématiciens ou les physiciens ? Le problème, c'est que l'on n'est pas sûr que ce qui est calculé est réellement une solution approchée et si le résultat est fidèle à la réalité.

Une comparaison avec un exemple très classique éclairera ces questions. Afin de décrire les phénomènes naturels par des équations, Isaac Newton avait énoncé les lois régissant la mécanique d'un point matériel, par exemple la loi selon laquelle la force agissant sur une masse ponctuelle est égale au produit de sa masse par son accélération. Considérons un nombre fini de masses ponctuelles, par exemple les corps célestes du Système solaire, dont on connaît les positions et vitesses à un instant donné. Supposons en outre que ces masses ponctuelles soient soumises aux seules forces de la gravitation newtonienne.

Dans ces conditions, toute l'évolution du système est mathématiquement déterminée : connaissant les positions et vitesses des points matériels à un instant donné, les équations de la mécanique permettent en principe de déterminer les positions et vitesses à tout instant ultérieur. Les mathé-

matiques offrent dans ce cas une image déterministe de la nature : des conditions initiales identiques impliquent toujours une même évolution au cours du temps.

Or les équations de Navier-Stokes ne présentent malheureusement pas un tel déterminisme. Il n'a pas été possible à ce jour de prouver, pour ces équations, qu'il existe en toutes circonstances une solution complètement déterminée par les conditions initiales. La situation reste par conséquent confuse. Du reste, l'Institut Clay n'a pas fixé comme objectif la démonstration de l'existence de solutions pour les équations de Navier-Stokes et la démonstration que les solutions, si elles existent, sont uniques ; il a plus humblement proposé de récompenser des « progrès essentiels » sur le sujet.

Pourquoi cette classe d'équations soulève-t-elle autant de difficultés ? C'est ce que nous allons expliquer dans la suite de cet article. Une première réponse, incomplète, est qu'avec les équations de Navier-Stokes, on passe du discret au continu. Il s'agit d'« équations aux dérivées partielles », et non d'équations différentielles ordinaires comme en mécanique du point.

Qu'est-ce que cela signifie ? Pour un point mobile, la deuxième loi de Newton, selon laquelle la force est égale à la masse multipliée par l'accélération, équivaut à une équation différentielle, l'inconnue étant la position $x(t)$ du point et l'accélération étant la dérivée $dv(t)/dt$ de la vitesse $v(t)$ par rapport au temps, c'est-à-dire la dérivée seconde $d^2x(t)/dt^2$ de la position : dans les équations de la mécanique du point n'interviennent que des fonctions d'une seule variable, le temps t .

En revanche, la description d'un fluide repose sur des fonctions de deux variables au moins : la position (décrite par une, deux ou trois coordonnées) et le temps. La vitesse d'un fluide au point r et à l'instant t est ainsi notée $v(r, t)$. En plus des dérivées par rapport au temps qui proviennent, comme dans le cas classique, de la deuxième loi de Newton, on a des dérivées par rapport aux coordonnées de position, car l'état (la vitesse, la pression) d'un fluide en un point dépend de, et influe sur, l'état du fluide aux points voisins (on parle de dérivées partielles, car il s'agit de dérivées par rapport à l'une seulement des variables de la fonction).

Comme on introduit au moins une fonction pour chaque point de l'espace et que ces points sont en nombre infini (un infini

L'ESSENTIEL

✓ Les équations de Navier-Stokes sont censées décrire les écoulements des fluides.

✓ Elles modélisent un fluide comme un milieu continu, c'est-à-dire caractérisé par des grandeurs physiques définies en tout point de l'espace et à tout instant.

✓ À ce jour, la cohérence mathématique de ces équations n'a pas été prouvée.

✓ Le phénomène de turbulence est l'un des principaux obstacles à une telle démonstration.