

les ponts ou les gratte-ciel, sous l'action du vent. La simulation numérique permet aussi de déterminer les caractéristiques aérodynamiques d'une automobile, d'un train à grande vitesse ou d'un avion, sans avoir à construire au préalable des prototypes de ces appareils et à les tester dans une soufflerie.

La simulation numérique en mécanique des fluides est fondée sur une stratégie de résolution approchée des équations de Navier-Stokes. Ces équations, qui se révèlent donc cruciales pour les activités des constructeurs automobiles ou des bureaux d'ingénieurs, s'invitent même à Hollywood afin, par exemple, de simuler le tourbillon où s'enfonça le *Titanic* lors de son naufrage.

L'existence et l'unicité des solutions sont à prouver

La résolution des équations de Navier-Stokes joue donc un rôle important, qu'il s'agisse de science ou de technologie. Pourquoi ces équations figurent-elles sur la liste des « problèmes du millénaire » ? Des équations dont des programmes informatiques calculent des solutions approchées présentent-elles encore un réel intérêt pour les mathématiciens ou les physiciens ? Le problème, c'est que l'on n'est pas sûr que ce qui est calculé est réellement une solution approchée et si le résultat est fidèle à la réalité.

Une comparaison avec un exemple très classique éclairera ces questions. Afin de décrire les phénomènes naturels par des équations, Isaac Newton avait énoncé les lois régissant la mécanique d'un point matériel, par exemple la loi selon laquelle la force agissant sur une masse ponctuelle est égale au produit de sa masse par son accélération. Considérons un nombre fini de masses ponctuelles, par exemple les corps célestes du Système solaire, dont on connaît les positions et vitesses à un instant donné. Supposons en outre que ces masses ponctuelles soient soumises aux seules forces de la gravitation newtonienne.

Dans ces conditions, toute l'évolution du système est mathématiquement déterminée : connaissant les positions et vitesses des points matériels à un instant donné, les équations de la mécanique permettent en principe de déterminer les positions et vitesses à tout instant ultérieur. Les mathé-

matiques offrent dans ce cas une image déterministe de la nature : des conditions initiales identiques impliquent toujours une même évolution au cours du temps.

Or les équations de Navier-Stokes ne présentent malheureusement pas un tel déterminisme. Il n'a pas été possible à ce jour de prouver, pour ces équations, qu'il existe en toutes circonstances une solution complètement déterminée par les conditions initiales. La situation reste par conséquent confuse. Du reste, l'Institut Clay n'a pas fixé comme objectif la démonstration de l'existence de solutions pour les équations de Navier-Stokes et la démonstration que les solutions, si elles existent, sont uniques ; il a plus humblement proposé de récompenser des « progrès essentiels » sur le sujet.

Pourquoi cette classe d'équations soulève-t-elle autant de difficultés ? C'est ce que nous allons expliquer dans la suite de cet article. Une première réponse, incomplète, est qu'avec les équations de Navier-Stokes, on passe du discret au continu. Il s'agit d'« équations aux dérivées partielles », et non d'équations différentielles ordinaires comme en mécanique du point.

Qu'est-ce que cela signifie ? Pour un point mobile, la deuxième loi de Newton, selon laquelle la force est égale à la masse multipliée par l'accélération, équivaut à une équation différentielle, l'inconnue étant la position $x(t)$ du point et l'accélération étant la dérivée $dv(t)/dt$ de la vitesse $v(t)$ par rapport au temps, c'est-à-dire la dérivée seconde $d^2x(t)/dt^2$ de la position : dans les équations de la mécanique du point n'interviennent que des fonctions d'une seule variable, le temps t .

En revanche, la description d'un fluide repose sur des fonctions de deux variables au moins : la position (décrite par une, deux ou trois coordonnées) et le temps. La vitesse d'un fluide au point r et à l'instant t est ainsi notée $v(r, t)$. En plus des dérivées par rapport au temps qui proviennent, comme dans le cas classique, de la deuxième loi de Newton, on a des dérivées par rapport aux coordonnées de position, car l'état (la vitesse, la pression) d'un fluide en un point dépend de, et influe sur, l'état du fluide aux points voisins (on parle de dérivées partielles, car il s'agit de dérivées par rapport à l'une seulement des variables de la fonction).

Comme on introduit au moins une fonction pour chaque point de l'espace et que ces points sont en nombre infini (un infini

L'ESSENTIEL

- ✓ Les équations de Navier-Stokes sont censées décrire les écoulements des fluides.
- ✓ Elles modélisent un fluide comme un milieu continu, c'est-à-dire caractérisé par des grandeurs physiques définies en tout point de l'espace et à tout instant.
- ✓ À ce jour, la cohérence mathématique de ces équations n'a pas été prouvée.
- ✓ Le phénomène de turbulence est l'un des principaux obstacles à une telle démonstration.

continu, et non discret), alors que dans le cas habituel seul un nombre fini de fonctions du temps interviennent (les positions ou vitesses des points mobiles considérés), on devine que les équations aux dérivées partielles sont bien plus complexes que les équations différentielles ordinaires. Mais il ne s'agit là que d'une petite partie de l'explication de la difficulté.

Examinons de plus près ces équations de Navier-Stokes. Elles décrivent les comportements tant des liquides que des gaz. Dans notre expérience quotidienne, l'eau et l'air semblent se comporter très différemment, mais ce phénomène tient essentiellement à la différence de masse volumique, la densité de l'eau étant un millier de fois supérieure à celle de l'air. Dans les équations, la densité du fluide apparaît sous la forme d'un paramètre constant, qui ne change donc pas fondamentalement le comportement des solutions.

Une autre différence apparente entre un liquide et un gaz est la compressibilité. Avec une simple pompe à bicyclette, on peut aisément comprimer un volume d'air. L'eau, de son côté, est incompressible, ce que l'on peut ressentir douloureusement en sautant mal d'un plongeur. L'expérience de la pompe



2. UN ÉCOULEMENT dans une cavité carrée plane où, initialement, le fluide est au repos, est un système souvent utilisé pour tester des algorithmes de résolution numérique des équations de la mécanique des fluides. Ici, le fluide est entraîné de gauche à droite au niveau de la paroi supérieure. Les lignes de courant correspondant à une rotation horaire sont en bleu, celles correspondant à une rotation antihoraire sont dans des teintes rouges.

à vélo est cependant atypique : au sommet des gratte-ciel, pour les trains rapides ou les avions, l'air, à des vitesses de l'ordre de 300 kilomètres par heure, se comporte comme s'il était incompressible.

Si le fluide doit être considéré comme compressible, c'est-à-dire si sa densité peut notablement varier, la situation est plus complexe. Aussi, nous nous limiterons dans la suite de cet article au cas des fluides incompressibles.

250 ans d'histoire

D'où viennent les équations de Navier-Stokes ? Leur histoire remonte au XVIII^e siècle. En 1755, dans un mémoire intitulé *Principes généraux du mouvement des fluides*, le grand savant suisse Leonhard Euler donna corps à l'hydrodynamique classique ou, plus précisément, à la mécanique des fluides sans frottements.

En appliquant les lois de Newton à des volumes infinitésimaux de fluide, Euler aboutit à un système d'équations qui porte aujourd'hui son nom (voir l'encadré ci-dessous), et il donna la première définition rigoureuse de la pression p d'un fluide. Les équations d'Euler sont un système de trois

LES ÉQUATIONS D'EULER

Afin d'établir les équations qui régissent l'écoulement des fluides, notamment celles d'Euler et de Navier-Stokes, les physiciens considèrent un minuscule « volume test » de position fixée et cherchent à déterminer les forces agissant sur le fluide qu'il contient.

La gravité est en général une première force extérieure à considérer. Il faut ensuite prendre en compte la pression, qui varie *a priori* d'un point à l'autre de la surface du volume test. Les liquides et les gaz tendent en effet à s'écouler dans la direction où la pression est la plus faible. Il faut enfin faire le bilan des entrées et sorties de fluide dans le volume test.

Grâce à l'analyse infinitésimale, on peut ensuite passer à la limite où le volume test se réduit à un point. La différence entre l'état du fluide au bord droit du volume test et son état au bord gauche correspond alors à une dérivée partielle (une dérivée par rapport à

la coordonnée dont l'axe va de gauche à droite). On obtient ainsi des équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire des équations où figurent des dérivées (partielles) de fonctions inconnues de la position et du temps.

Notons u, v, w les composantes de la vitesse de l'écoulement selon les axes Ox, Oy, Oz respectivement et f, g, h les trois composantes d'une force extérieure donnée. L'écriture $\partial u / \partial t$ désigne la dérivée de la composante u de la vitesse par rapport au temps t , l'écriture $\partial p / \partial z$ désigne la dérivée de la pression par rapport à la coordonnée z , et ainsi de suite. Avec ces notations, les équations d'Euler s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= f \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} &= g \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= h \end{aligned}$$

Elles sont une traduction de la loi de Newton selon laquelle le produit de la masse par l'accélération est égal à la force appliquée.

L'accélération (dérivée de la vitesse) correspond aux quatre premiers termes de chaque équation du système (la dérivée partielle par rapport au temps est complétée par trois termes en raison du fait que la vitesse intervenant dans ces équations est celle caractérisant le fluide en un point donné de l'espace, et non la vitesse d'une particule fluide suivie dans son mouvement).

Le cinquième terme (par exemple $\partial p / \partial x$) est la force due à la pression, qui est une force interne au fluide. Par convention, on place les forces extérieures dans le membre de droite des équations.

Par ailleurs, dans ces équations où l'on suppose le fluide incompressible, la densité (ou la masse) du fluide ne figure pas explicitement ; pour simplifier l'écriture,

elle est intégrée dans les définitions de la pression et de la force extérieure.

Grâce aux notations de l'analyse vectorielle, on peut exprimer ces trois équations en une seule formule compacte et élégante. Notons $\mathbf{v} = (u, v, w)$ le vecteur vitesse et $\mathbf{f} = (f, g, h)$ le vecteur force extérieure. Avec l'opérateur « nabra » $\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$, les équations d'Euler s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}$$

où $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

Cette expression (trois équations pour quatre fonctions inconnues) doit être complétée par une autre équation, qui exprime l'incompressibilité et la conservation de la masse et qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \text{c'est-à-dire} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$