

continu, et non discret), alors que dans le cas habituel seul un nombre fini de fonctions du temps interviennent (les positions ou vitesses des points mobiles considérés), on devine que les équations aux dérivées partielles sont bien plus complexes que les équations différentielles ordinaires. Mais il ne s'agit là que d'une petite partie de l'explication de la difficulté.

Examinons de plus près ces équations de Navier-Stokes. Elles décrivent les comportements tant des liquides que des gaz. Dans notre expérience quotidienne, l'eau et l'air semblent se comporter très différemment, mais ce phénomène tient essentiellement à la différence de masse volumique, la densité de l'eau étant un millier de fois supérieure à celle de l'air. Dans les équations, la densité du fluide apparaît sous la forme d'un paramètre constant, qui ne change donc pas fondamentalement le comportement des solutions.

Une autre différence apparente entre un liquide et un gaz est la compressibilité. Avec une simple pompe à bicyclette, on peut aisément comprimer un volume d'air. L'eau, de son côté, est incompressible, ce que l'on peut ressentir douloureusement en sautant mal d'un plongeur. L'expérience de la pompe



Equipe de Stéfan Turek, Université technologique de Dortmund

2. UN ÉCOULEMENT dans une cavité carrée plane où, initialement, le fluide est au repos, est un système souvent utilisé pour tester des algorithmes de résolution numérique des équations de la mécanique des fluides. Ici, le fluide est entraîné de gauche à droite au niveau de la paroi supérieure. Les lignes de courant correspondant à une rotation horaire sont en bleu, celles correspondant à une rotation antihoraire sont dans des teintes rouges.

à vélo est cependant atypique : au sommet des gratte-ciel, pour les trains rapides ou les avions, l'air, à des vitesses de l'ordre de 300 kilomètres par heure, se comporte comme s'il était incompressible.

Si le fluide doit être considéré comme compressible, c'est-à-dire si sa densité peut notablement varier, la situation est plus complexe. Aussi, nous nous limiterons dans la suite de cet article au cas des fluides incompressibles.

250 ans d'histoire

D'où viennent les équations de Navier-Stokes ? Leur histoire remonte au XVIII^e siècle. En 1755, dans un mémoire intitulé *Principes généraux du mouvement des fluides*, le grand savant suisse Leonhard Euler donna corps à l'hydrodynamique classique ou, plus précisément, à la mécanique des fluides sans frottements.

En appliquant les lois de Newton à des volumes infinitésimaux de fluide, Euler aboutit à un système d'équations qui porte aujourd'hui son nom (voir l'encadré ci-dessous), et il donna la première définition rigoureuse de la pression p d'un fluide. Les équations d'Euler sont un système de trois

LES ÉQUATIONS D'EULER

Afin d'établir les équations qui régissent l'écoulement des fluides, notamment celles d'Euler et de Navier-Stokes, les physiciens considèrent un minuscule « volume test » de position fixée et cherchent à déterminer les forces agissant sur le fluide qu'il contient.

La gravité est en général une première force extérieure à considérer. Il faut ensuite prendre en compte la pression, qui varie *a priori* d'un point à l'autre de la surface du volume test. Les liquides et les gaz tendent en effet à s'écouler dans la direction où la pression est la plus faible. Il faut enfin faire le bilan des entrées et sorties de fluide dans le volume test.

Grâce à l'analyse infinitésimale, on peut ensuite passer à la limite où le volume test se réduit à un point. La différence entre l'état du fluide au bord droit du volume test et son état au bord gauche correspond alors à une dérivée partielle (une dérivée par rapport à

la coordonnée dont l'axe va de gauche à droite). On obtient ainsi des équations aux dérivées partielles, c'est-à-dire des équations où figurent des dérivées (partielles) de fonctions inconnues de la position et du temps.

Notons u, v, w les composantes de la vitesse de l'écoulement selon les axes Ox, Oy, Oz respectivement et f, g, h les trois composantes d'une force extérieure donnée. L'écriture $\partial u / \partial t$ désigne la dérivée de la composante u de la vitesse par rapport au temps t , l'écriture $\partial p / \partial z$ désigne la dérivée de la pression par rapport à la coordonnée z , et ainsi de suite. Avec ces notations, les équations d'Euler s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= f \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} &= g \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= h \end{aligned}$$

Elles sont une traduction de la loi de Newton selon laquelle le produit de la masse par l'accélération est égal à la force appliquée.

L'accélération (dérivée de la vitesse) correspond aux quatre premiers termes de chaque équation du système (la dérivée partielle par rapport au temps est complétée par trois termes en raison du fait que la vitesse intervenant dans ces équations est celle caractérisant le fluide en un point donné de l'espace, et non la vitesse d'une particule fluide suivie dans son mouvement).

Le cinquième terme (par exemple $\partial p / \partial x$) est la force due à la pression, qui est une force interne au fluide. Par convention, on place les forces extérieures dans le membre de droite des équations.

Par ailleurs, dans ces équations où l'on suppose le fluide incompressible, la densité (ou la masse) du fluide ne figure pas explicitement ; pour simplifier l'écriture,

elle est intégrée dans les définitions de la pression et de la force extérieure.

Grâce aux notations de l'analyse vectorielle, on peut exprimer ces trois équations en une seule formule compacte et élégante. Notons $\mathbf{v} = (u, v, w)$ le vecteur vitesse et $\mathbf{f} = (f, g, h)$ le vecteur force extérieure. Avec l'opérateur « nabra » $\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$, les équations d'Euler s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}$$

où $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

Cette expression (trois équations pour quatre fonctions inconnues) doit être complétée par une autre équation, qui exprime l'incompressibilité et la conservation de la masse et qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \text{c'est-à-dire} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

équations comportant quatre fonctions inconnues de la position et du temps : les trois composantes (u, v, w) de la vitesse du fluide (selon les axes Ox , Oy et Oz respectivement) et la pression p . Afin de déterminer un système unique de solutions, il est nécessaire d'introduire une équation supplémentaire, qui traduit localement la conservation de la masse du fluide.

Euler avait également énoncé ces équations dans le cas de fluides compressibles ; le cas incompressible s'en déduit en supposant que la densité du fluide est une constante, indépendante du temps et de la position.

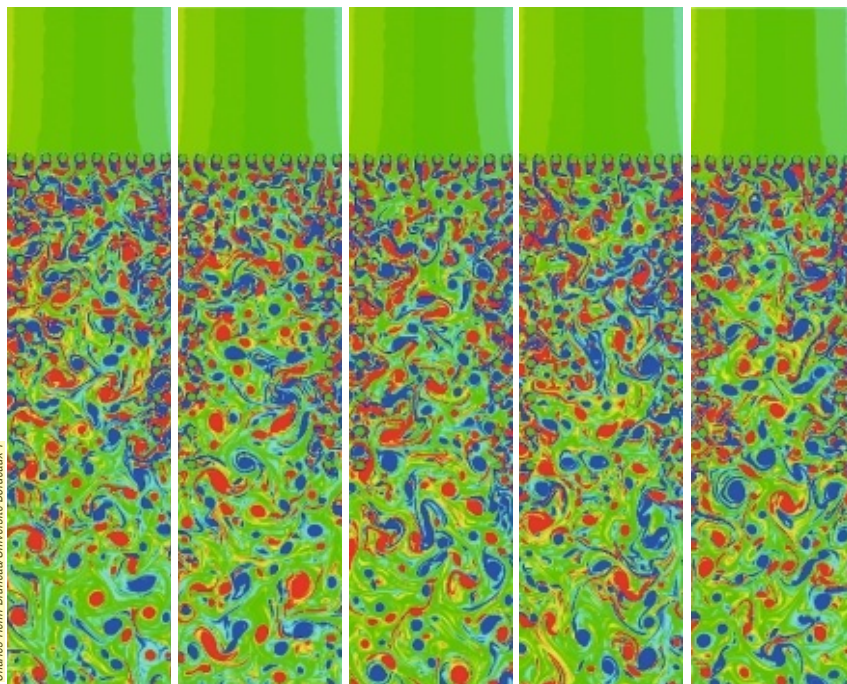
Il est facile de voir que les équations d'Euler sont un cas particulier des équations de Navier-Stokes : les secondes se ramènent aux premières en annulant le terme de viscosité, lié aux frottements.

Les équations d'Euler font apparaître une difficulté qu'elles partagent avec les équations de Navier-Stokes : elles sont non linéaires. La propriété de non-linéarité, qui peut se lire aisément sur une équation, signifie que la somme de deux solutions possibles de l'équation ne constitue pas, en général, une autre solution possible.

Cela implique des différences importantes par rapport aux équations linéaires. Par exemple, des ondes régies par des équations linéaires peuvent se maintenir et se superposer sans interagir et se perturber mutuellement. En outre, les solutions d'équations linéaires ne peuvent pas devenir beaucoup plus complexes que les conditions aux limites (la donnée des vitesses du fluide sur le bord de la région qu'il occupe) ou les conditions initiales (la donnée des vitesses initiales du fluide). En revanche, dans le cas d'une équation non linéaire, même une situation géométrique très simple peut donner lieu à une solution (un écoulement) d'une grande complexité.

La viscosité, facteur de régularité

Le frottement, qui entraîne une dissipation d'énergie, est un élément modérateur dans les écoulements. Cela explique que les équations d'Euler soient souvent plus « turbulentes » encore que celles de Navier-Stokes. Par exemple, les solutions des équations d'Euler peuvent décrire des écoulements où le fluide est cisailé et où, par conséquent, la vitesse du fluide n'est pas définie sur toute une surface. En fait, pour ces raisons, on sait qu'il n'est



3. SIMULATION NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT d'un film d'eau savonneuse, de haut en bas, à travers lequel sont installés des obstacles (dix petits cercles en amont, analogues à des piliers de pont sur une rivière, et une autre série de petits cercles disposés sur le bord gauche). Les cinq images montrent l'état du fluide à des instants successifs. Les parties en bleu correspondent à des tourbillons tournant dans un sens, les parties en rouge à des tourbillons tournant dans le sens contraire. Les obstacles sont responsables de la turbulence de l'écoulement en aval. Il s'agit là d'une turbulence à deux dimensions, que les mathématiciens et physiciens comprennent mieux qu'en trois dimensions. En fait, en deux dimensions, les équations de Navier-Stokes sont aussi mieux maîtrisées, et on a su prouver dans ce cas à la fois l'existence et l'unicité de solutions régulières.

pas possible d'obtenir un énoncé général d'unicité des solutions pour les équations d'Euler.

Dans la réalité cependant, les fluides ne souffrent pas de ces ambiguïtés et semblent avoir des vitesses bien définies partout. On en conclut qu'un élément crucial n'est pas pris en compte dans les équations d'Euler. Cela a conduit Gregori Tokaty, mécanicien des fluides d'origine russe disparu en 2003, à proposer la métaphore suivante : avec ses équations, le tailleur de génie Euler nous a confectionné un pantalon, certes magnifique, mais dépourvu de tout bouton. Ce qui empêche ce pantalon de glisser (ou les fluides de se décomposer), c'est l'omniprésence d'un frottement qui, dans le cas des fluides, est désigné par le terme de viscosité. Si ce phénomène est familier pour des liquides tels que le miel ou l'huile, il l'est moins pour les gaz ; les scientifiques ont d'ailleurs mis longtemps à appréhender le rôle crucial joué par la résistance de l'air et à élaborer une théorie des fluides visqueux.

L'AUTEUR



Thomas SONAR est professeur de mathématiques appliquées à l'Université technologique de Braunschweig, en Allemagne. Il y dirige le Département *Équations aux dérivées partielles* de l'Institut de mathématiques computationnelles.

Laure Saint-Raymond (Département de mathématiques de l'École normale supérieure, Paris), a aidé à l'adaptation de cet article en français. Elle sera par ailleurs l'invitée de « Raconte-moi un chercheur » le 26 avril à 18h30 au Palais de la découverte, à Paris.