

équations comportant quatre fonctions inconnues de la position et du temps : les trois composantes (u, v, w) de la vitesse du fluide (selon les axes Ox , Oy et Oz respectivement) et la pression p . Afin de déterminer un système unique de solutions, il est nécessaire d'introduire une équation supplémentaire, qui traduit localement la conservation de la masse du fluide.

Euler avait également énoncé ces équations dans le cas de fluides compressibles ; le cas incompressible s'en déduit en supposant que la densité du fluide est une constante, indépendante du temps et de la position.

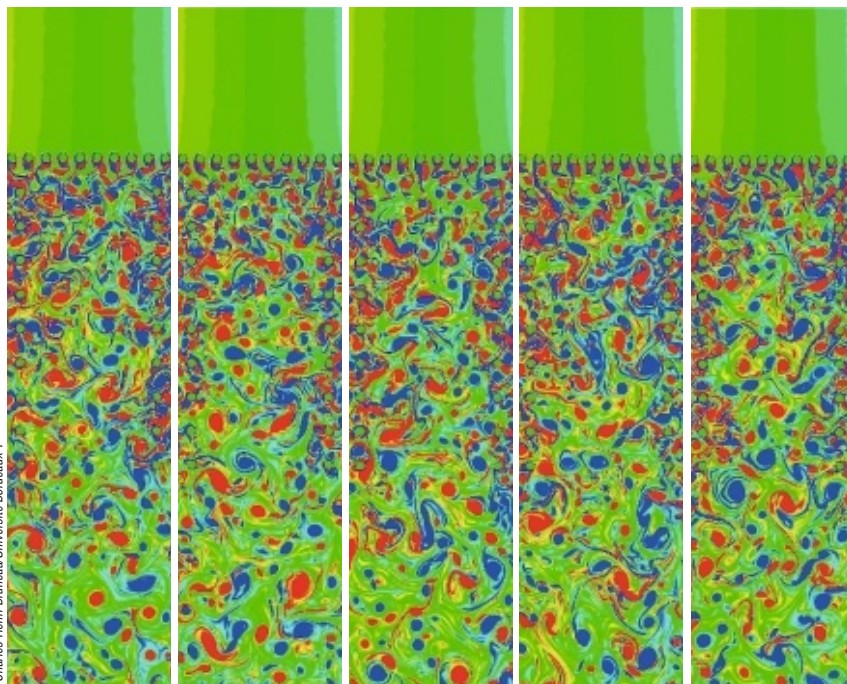
Il est facile de voir que les équations d'Euler sont un cas particulier des équations de Navier-Stokes : les secondes se ramènent aux premières en annulant le terme de viscosité, lié aux frottements.

Les équations d'Euler font apparaître une difficulté qu'elles partagent avec les équations de Navier-Stokes : elles sont non linéaires. La propriété de non-linéarité, qui peut se lire aisément sur une équation, signifie que la somme de deux solutions possibles de l'équation ne constitue pas, en général, une autre solution possible.

Cela implique des différences importantes par rapport aux équations linéaires. Par exemple, des ondes régies par des équations linéaires peuvent se maintenir et se superposer sans interagir et se perturber mutuellement. En outre, les solutions d'équations linéaires ne peuvent pas devenir beaucoup plus complexes que les conditions aux limites (la donnée des vitesses du fluide sur le bord de la région qu'il occupe) ou les conditions initiales (la donnée des vitesses initiales du fluide). En revanche, dans le cas d'une équation non linéaire, même une situation géométrique très simple peut donner lieu à une solution (un écoulement) d'une grande complexité.

La viscosité, facteur de régularité

Le frottement, qui entraîne une dissipation d'énergie, est un élément modérateur dans les écoulements. Cela explique que les équations d'Euler soient souvent plus « turbulentes » encore que celles de Navier-Stokes. Par exemple, les solutions des équations d'Euler peuvent décrire des écoulements où le fluide est cisailé et où, par conséquent, la vitesse du fluide n'est pas définie sur toute une surface. En fait, pour ces raisons, on sait qu'il n'est



Charles-Henri Bruneau Université Bordeaux 1

3. SIMULATION NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT d'un film d'eau savonneuse, de haut en bas, à travers lequel sont installés des obstacles (dix petits cercles en amont, analogues à des piliers de pont sur une rivière, et une autre série de petits cercles disposés sur le bord gauche). Les cinq images montrent l'état du fluide à des instants successifs. Les parties en bleu correspondent à des tourbillons tournant dans un sens, les parties en rouge à des tourbillons tournant dans le sens contraire. Les obstacles sont responsables de la turbulence de l'écoulement en aval. Il s'agit là d'une turbulence à deux dimensions, que les mathématiciens et physiciens comprennent mieux qu'en trois dimensions. En fait, en deux dimensions, les équations de Navier-Stokes sont aussi mieux maîtrisées, et on a su prouver dans ce cas à la fois l'existence et l'unicité de solutions régulières.

pas possible d'obtenir un énoncé général d'unicité des solutions pour les équations d'Euler.

Dans la réalité cependant, les fluides ne souffrent pas de ces ambiguïtés et semblent avoir des vitesses bien définies partout. On en conclut qu'un élément crucial n'est pas pris en compte dans les équations d'Euler. Cela a conduit Gregori Tokaty, mécanicien des fluides d'origine russe disparu en 2003, à proposer la métaphore suivante : avec ses équations, le tailleur de génie Euler nous a confectionné un pantalon, certes magnifique, mais dépourvu de tout bouton. Ce qui empêche ce pantalon de glisser (ou les fluides de se décomposer), c'est l'omniprésence d'un frottement qui, dans le cas des fluides, est désigné par le terme de viscosité. Si ce phénomène est familier pour des liquides tels que le miel ou l'huile, il l'est moins pour les gaz ; les scientifiques ont d'ailleurs mis longtemps à appréhender le rôle crucial joué par la résistance de l'air et à élaborer une théorie des fluides visqueux.

L'AUTEUR



Thomas SONAR est professeur de mathématiques appliquées à l'Université technologique de Braunschweig, en Allemagne. Il y dirige le Département *Équations aux dérivées partielles* de l'Institut de mathématiques computationnelles.

Laure Saint-Raymond (Département de mathématiques de l'École normale supérieure, Paris), a aidé à l'adaptation de cet article en français. Elle sera par ailleurs l'invitée de « Raconte-moi un chercheur » le 26 avril à 18h30 au Palais de la découverte, à Paris.

✓ BIBLIOGRAPHIE

É. Guyon *et al.*, **Ce que disent les fluides**, 2^e édition, Belin-Pour la Science, 2011.

É. Guyon *et al.*, **Hydrodynamique physique**, 2^e édition, EDP Sciences-CNRS Éditions, 2011.

C. Sabbah *et al.* (éds.), **Facettes mathématiques de la mécanique des fluides**, Journées X-UPS 2010, École polytechnique/Ellipses, 2011.

V. Šverák, **PDE aspects of the Navier-Stokes equations**, colloque De Giorgi, 2007, téléchargeable sur : www.math.umn.edu/~sverak/publications/DeGiorgi.colloquium2007

L. Saint-Raymond, **Le comportement des gaz : d'une limite à l'autre**, *Pour la Science*, n° 324, pp. 52-59, octobre 2004.

P. G. Lemarié-Rieusset, **Recent Developments in the Navier-Stokes Problem**, Chapman & Hall/CRC, 2002.

Newton avait déjà formulé l'hypothèse selon laquelle, dans un fluide visqueux s'écoulant entre deux parois, apparaissent des forces de cisaillement proportionnelles à la vitesse du fluide. Cent cinquante ans plus tard, l'ingénieur polytechnicien français Claude-Louis Navier, avec son *Mémoire sur les lois du mouvement du fluide* de 1822, réalisait une percée dans la prise en compte de la viscosité.

Attiré par l'atomisme de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), Navier a inscrit ses travaux dans le cadre de la théorie moléculaire. Mais il s'est appuyé sur les méthodes de la mécanique des milieux continus et la théorie de l'élasticité, développées en particulier vers 1820 par le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy.

Pour expliquer la viscosité, Navier postula l'existence d'une force d'attraction entre deux molécules, l'intensité de cette force décroissant rapidement avec la distance, et il en déduisit de façon remarquable une équation utilisable à l'échelle macroscopique. Il énonça aussi qu'un fluide visqueux ne peut glisser parfaitement le long des parois d'un conduit ; au contraire, sa vitesse au niveau des parois doit être proche de zéro. C'est la « condition de non-glissement » du fluide le long des parois.

Certains désaccords entre la théorie de Navier et les observations, ainsi que le besoin de clarifier plusieurs points dans

les raisonnements, ont rendu Navier perplexe et les autres scientifiques ne furent pas convaincus. Mais les équations étaient en place.

Quelques années plus tard, toujours en France, Adhémar Barré de Saint-Venant parvenait à faire progresser la théorie des fluides visqueux sans utiliser d'hypothèses de nature moléculaire. Dans son *Mémoire sur la dynamique des sciences*, Barré de Saint-Venant se concentrait sur la modélisation de la vitesse relative des particules de fluide, le terme « particule » devant ici se comprendre au sens de la mécanique du continu, c'est-à-dire comme un volume infinitésimal de fluide. Si l'on considère deux particules de fluide adjacentes se déplaçant à des vitesses différentes, une force de cisaillement résulte du frottement entre les deux particules.

La viscosité modélisée

Contrairement à la pression hydrostatique, la force de cisaillement ne s'exerce pas perpendiculairement à l'interface des deux particules fluides, mais tangentielle. Barré de Saint-Venant adopta alors pour hypothèse que les forces de cisaillement apparaissent dans la direction de l'écoulement – plus précisément dans le sens du mouvement relatif des deux particules de fluide – et qu'elles sont proportionnelles à la vitesse relative des deux particules.

On montre qu'il résulte de ces forces de cisaillement, qui s'opposent à la vitesse relative de deux particules fluides en contact, une viscosité qui lisse les différences de vitesses entre un point du fluide et ses voisins. La force de viscosité correspond alors, dans les équations de Navier-Stokes, à un coefficient de viscosité, noté par la lettre grecque ν , multiplié par la somme des dérivées spatiales d'ordre deux de la vitesse (voir l'encadré ci-contre).

Ainsi, Barré de Saint-Venant avait franchi un pas significatif pour établir les équations de Navier-Stokes. Et pourtant, son nom ne leur est pas associé. Pourquoi ? En fait, les travaux de Barré de Saint-Venant n'ont été imprimés, et donc diffusés, qu'en 1843. Indépendamment, le physicien britannique George Gabriel Stokes publia en 1845 des résultats similaires dans sa thèse *On the theories of the internal friction of fluids in motion*. De façon un peu

LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Dans l'espace tridimensionnel, les équations de Navier-Stokes censées régir l'écoulement d'un fluide incompressible s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= f \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= g \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= h.\end{aligned}$$

Elles reviennent à ajouter aux équations d'Euler un terme correspondant à la force de viscosité. Le terme de viscosité se compose du coefficient de viscosité ν multiplié par une somme de dérivées secondes de la vitesse. Cette somme s'exprime de façon compacte à l'aide de l'opérateur « laplacien », noté par la majuscule grecque Δ (delta) et défini par :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Les équations de Navier-Stokes prennent alors l'expression vectorielle suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} = \mathbf{f}.$$

La conservation de la masse est également vérifiée par les équations de Navier-Stokes, et s'exprime par la même équation que pour les équations d'Euler ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$).