

✓ BIBLIOGRAPHIE

É. Guyon *et al.*, **Ce que disent les fluides**, 2^e édition, Belin-Pour la Science, 2011.

É. Guyon *et al.*, **Hydrodynamique physique**, 2^e édition, EDP Sciences-CNRS Éditions, 2011.

C. Sabbah *et al.* (éds.), **Facettes mathématiques de la mécanique des fluides**, Journées X-UPS 2010, École polytechnique/Ellipses, 2011.

V. Šverák, **PDE aspects of the Navier-Stokes equations**, colloque De Giorgi, 2007, téléchargeable sur : www.math.umn.edu/~sverak/publications/DeGiorgi.colloquium2007

L. Saint-Raymond, **Le comportement des gaz : d'une limite à l'autre**, *Pour la Science*, n° 324, pp. 52-59, octobre 2004.

P. G. Lemarié-Rieusset, **Recent Developments in the Navier-Stokes Problem**, Chapman & Hall/CRC, 2002.

Newton avait déjà formulé l'hypothèse selon laquelle, dans un fluide visqueux s'écoulant entre deux parois, apparaissent des forces de cisaillement proportionnelles à la vitesse du fluide. Cent cinquante ans plus tard, l'ingénieur polytechnicien français Claude-Louis Navier, avec son *Mémoire sur les lois du mouvement du fluide* de 1822, réalisait une percée dans la prise en compte de la viscosité.

Attiré par l'atomisme de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), Navier a inscrit ses travaux dans le cadre de la théorie moléculaire. Mais il s'est appuyé sur les méthodes de la mécanique des milieux continus et la théorie de l'élasticité, développées en particulier vers 1820 par le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy.

Pour expliquer la viscosité, Navier postula l'existence d'une force d'attraction entre deux molécules, l'intensité de cette force décroissant rapidement avec la distance, et il en déduisit de façon remarquable une équation utilisable à l'échelle macroscopique. Il énonça aussi qu'un fluide visqueux ne peut glisser parfaitement le long des parois d'un conduit ; au contraire, sa vitesse au niveau des parois doit être proche de zéro. C'est la « condition de non-glissement » du fluide le long des parois.

Certains désaccords entre la théorie de Navier et les observations, ainsi que le besoin de clarifier plusieurs points dans

les raisonnements, ont rendu Navier perplexe et les autres scientifiques ne furent pas convaincus. Mais les équations étaient en place.

Quelques années plus tard, toujours en France, Adhémar Barré de Saint-Venant parvenait à faire progresser la théorie des fluides visqueux sans utiliser d'hypothèses de nature moléculaire. Dans son *Mémoire sur la dynamique des fluides* présenté en 1834 à l'Académie des sciences, Barré de Saint-Venant se concentrait sur la modélisation de la vitesse relative des particules de fluide, le terme « particule » devant ici se comprendre au sens de la mécanique du continu, c'est-à-dire comme un volume infinitésimal de fluide. Si l'on considère deux particules de fluide adjacentes se déplaçant à des vitesses différentes, une force de cisaillement résulte du frottement entre les deux particules.

La viscosité modélisée

Contrairement à la pression hydrostatique, la force de cisaillement ne s'exerce pas perpendiculairement à l'interface des deux particules fluides, mais tangentiellement. Barré de Saint-Venant adopta alors pour hypothèse que les forces de cisaillement apparaissent dans la direction de l'écoulement – plus précisément dans le sens du mouvement relatif des deux particules de fluide – et qu'elles sont proportionnelles à la vitesse relative des deux particules.

On montre qu'il résulte de ces forces de cisaillement, qui s'opposent à la vitesse relative de deux particules fluides en contact, une viscosité qui lisse les différences de vitesses entre un point du fluide et ses voisins. La force de viscosité correspond alors, dans les équations de Navier-Stokes, à un coefficient de viscosité, noté par la lettre grecque ν , multiplié par la somme des dérivées spatiales d'ordre deux de la vitesse (voir l'encadré ci-contre).

Ainsi, Barré de Saint-Venant avait franchi un pas significatif pour établir les équations de Navier-Stokes. Et pourtant, son nom ne leur est pas associé. Pourquoi ? En fait, les travaux de Barré de Saint-Venant n'ont été imprimés, et donc diffusés, qu'en 1843. Indépendamment, le physicien britannique George Gabriel Stokes publia en 1845 des résultats similaires dans sa thèse *On the theories of the internal friction of fluids in motion*. De façon un peu

LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Dans l'espace tridimensionnel, les équations de Navier-Stokes censées régir l'écoulement d'un fluide incompressible s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= f \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= g \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= h. \end{aligned}$$

Elles reviennent à ajouter aux équations d'Euler un terme correspondant à la force de viscosité. Le terme de viscosité se compose du coefficient de viscosité ν multiplié par une somme de dérivées secondes de la vitesse. Cette somme s'exprime de façon compacte à l'aide de l'opérateur « laplacien », noté par la majuscule grecque Δ (delta) et défini par :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Les équations de Navier-Stokes prennent alors l'expression vectorielle suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} = \mathbf{f}.$$

La conservation de la masse est également vérifiée par les équations de Navier-Stokes, et s'exprime par la même équation que pour les équations d'Euler ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$).