

✓ BIBLIOGRAPHIE

É. Guyon *et al.*, **Ce que disent les fluides**, 2^e édition, Belin-Pour la Science, 2011.

É. Guyon *et al.*, **Hydrodynamique physique**, 2^e édition, EDP Sciences-CNRS Éditions, 2011.

C. Sabbah *et al.* (éds.), **Facettes mathématiques de la mécanique des fluides**, Journées X-UPS 2010, École polytechnique/Ellipses, 2011.

V. Šverák, **PDE aspects of the Navier-Stokes equations**, colloque De Giorgi, 2007, téléchargeable sur : www.math.umn.edu/~sverak/publications/DeGiorgi.colloquium2007

L. Saint-Raymond, **Le comportement des gaz : d'une limite à l'autre**, *Pour la Science*, n° 324, pp. 52-59, octobre 2004.

P. G. Lemarié-Rieusset, **Recent Developments in the Navier-Stokes Problem**, Chapman & Hall/CRC, 2002.

Newton avait déjà formulé l'hypothèse selon laquelle, dans un fluide visqueux s'écoulant entre deux parois, apparaissent des forces de cisaillement proportionnelles à la vitesse du fluide. Cent cinquante ans plus tard, l'ingénieur polytechnicien français Claude-Louis Navier, avec son *Mémoire sur les lois du mouvement du fluide* de 1822, réalisait une percée dans la prise en compte de la viscosité.

Attiré par l'atomisme de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), Navier a inscrit ses travaux dans le cadre de la théorie moléculaire. Mais il s'est appuyé sur les méthodes de la mécanique des milieux continus et la théorie de l'élasticité, développées en particulier vers 1820 par le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy.

Pour expliquer la viscosité, Navier postula l'existence d'une force d'attraction entre deux molécules, l'intensité de cette force décroissant rapidement avec la distance, et il en déduisit de façon remarquable une équation utilisable à l'échelle macroscopique. Il énonça aussi qu'un fluide visqueux ne peut glisser parfaitement le long des parois d'un conduit ; au contraire, sa vitesse au niveau des parois doit être proche de zéro. C'est la « condition de non-glissement » du fluide le long des parois.

Certains désaccords entre la théorie de Navier et les observations, ainsi que le besoin de clarifier plusieurs points dans

les raisonnements, ont rendu Navier perplexe et les autres scientifiques ne furent pas convaincus. Mais les équations étaient en place.

Quelques années plus tard, toujours en France, Adhémar Barré de Saint-Venant parvenait à faire progresser la théorie des fluides visqueux sans utiliser d'hypothèses de nature moléculaire. Dans son *Mémoire sur la dynamique des fluides* présenté en 1834 à l'Académie des sciences, Barré de Saint-Venant se concentrait sur la modélisation de la vitesse relative des particules de fluide, le terme « particule » devant ici se comprendre au sens de la mécanique du continu, c'est-à-dire comme un volume infinitésimal de fluide. Si l'on considère deux particules de fluide adjacentes se déplaçant à des vitesses différentes, une force de cisaillement résulte du frottement entre les deux particules.

La viscosité modélisée

Contrairement à la pression hydrostatique, la force de cisaillement ne s'exerce pas perpendiculairement à l'interface des deux particules fluides, mais tangentielle. Barré de Saint-Venant adopta alors pour hypothèse que les forces de cisaillement apparaissent dans la direction de l'écoulement – plus précisément dans le sens du mouvement relatif des deux particules de fluide – et qu'elles sont proportionnelles à la vitesse relative des deux particules.

On montre qu'il résulte de ces forces de cisaillement, qui s'opposent à la vitesse relative de deux particules fluides en contact, une viscosité qui lisse les différences de vitesses entre un point du fluide et ses voisins. La force de viscosité correspond alors, dans les équations de Navier-Stokes, à un coefficient de viscosité, noté par la lettre grecque ν , multiplié par la somme des dérivées spatiales d'ordre deux de la vitesse (voir l'encadré ci-contre).

Ainsi, Barré de Saint-Venant avait franchi un pas significatif pour établir les équations de Navier-Stokes. Et pourtant, son nom ne leur est pas associé. Pourquoi ? En fait, les travaux de Barré de Saint-Venant n'ont été imprimés, et donc diffusés, qu'en 1843. Indépendamment, le physicien britannique George Gabriel Stokes publia en 1845 des résultats similaires dans sa thèse *On the theories of the internal friction of fluids in motion*. De façon un peu

LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Dans l'espace tridimensionnel, les équations de Navier-Stokes censées régir l'écoulement d'un fluide incompressible s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= f \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= g \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= h.\end{aligned}$$

Elles reviennent à ajouter aux équations d'Euler un terme correspondant à la force de viscosité. Le terme de viscosité se compose du coefficient de viscosité ν multiplié par une somme de dérivées secondes de la vitesse. Cette somme s'exprime de façon compacte à l'aide de l'opérateur « laplacien », noté par la majuscule grecque Δ (delta) et défini par :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Les équations de Navier-Stokes prennent alors l'expression vectorielle suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} = \mathbf{f}.$$

La conservation de la masse est également vérifiée par les équations de Navier-Stokes, et s'exprime par la même équation que pour les équations d'Euler ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$).

injuste, sur les deux noms, seul celui de Stokes, en plus de celui de Navier, s'est imposé pour désigner les équations du mouvement d'un fluide.

Revenons aux difficultés associées aux équations de Navier-Stokes. L'une des principales concerne la turbulence, très souvent constatée dans les écoulements rapides. Le caractère fascinant et intrigant de ce phénomène peut être constaté sur une expérience très simple. Il suffit d'observer un lent écoulement d'eau dans un tube horizontal en verre auquel on ajoute une goutte colorée : la goutte s'étire en un fil qui, au bout d'une certaine distance, se met à tourbillonner et ainsi à se mélanger de façon chaotique avec l'eau. Le courant est devenu spontanément turbulent !

Un problème épineux : la turbulence

La turbulence est un phénomène auquel les physiciens et mathématiciens s'intéressent depuis longtemps, sans qu'ils soient parvenus à en proposer une explication et une description satisfaisantes. Cela n'empêche pas son exploitation par les ingénieurs. On sait par exemple qu'un sillage turbulent derrière un mobile entraîne une résistance, ou force de traînée, moins importante qu'un sillage laminaire (non turbulent). C'est pourquoi le profil des casques de moto modernes comporte des creux, qui rendent turbulent l'écoulement de l'air en aval du casque.

La turbulence est un phénomène qui met en jeu de multiples échelles de longueur, qui vont jusqu'à l'échelle microscopique. Or à cette échelle, la description d'un fluide en tant que milieu continu, qui est à la base des équations de Navier-Stokes, perd sa pertinence. Qui plus est, les méthodes numériques pour résoudre ces équations procèdent par discrétisation, un découpage de l'espace en petits volumes où l'écoulement est supposé uniforme – ce qui n'est pas une bonne approximation si l'écoulement est turbulent jusqu'à des échelles plus petites que celle de la discrétisation.

Il n'est donc pas du tout assuré que, dans des régimes turbulents, la résolution numérique des équations de Navier-Stokes fournisse des solutions qui ressemblent suffisamment au comportement réel du fluide. En fait, en simulation numérique, on s'appuie sur ce que l'on appelle des modèles de turbulence, où l'on intro-



4. UN VENT FORT RENCONTRANT UNE ÎLE subit des turbulences et forme un sillage de tourbillons alternés visibles dans la couverture nuageuse. Les modèles météorologiques et climatiques utilisent eux aussi les équations de Navier-Stokes pour décrire et prévoir la circulation atmosphérique. Une illustration supplémentaire de l'importance de bien comprendre ces équations.

duit de façon *ad hoc*, phénoménologique, des paramètres censés englober les détails inaccessibles de la turbulence. Ces modèles, dont il existe des familles entières, aboutissent à des résultats plus ou moins utiles selon les champs d'application. Mais ils ne sont qu'un pis-aller en l'absence d'une véritable compréhension de la turbulence.

Il faut aussi souligner que les algorithmes numériques ne résolvent pas vraiment les équations de Navier-Stokes : ils visent des approximations des solutions de ces équations, en supposant que celles-ci existent. Par exemple, la discrétisation remplace les dérivées, mathématiquement définies par un passage à la limite, par de simples quotients de différences. Autrement dit, on remplace la question posée par une autre, plus simple et qui approche autant que possible la question originale, tout en espérant que la solution de ce nouveau problème sera elle aussi assez voisine de la solution de la question initiale. Cela doit cependant être prouvé au cas par cas.

Le modèle reflète-t-il la réalité ?

On croit souvent qu'une procédure fiable de vérification est de comparer les solutions numériques avec des données expérimentales. Mais il s'agit là d'une idée fausse. On peut certes ajuster progressivement un modèle de turbulence jusqu'à ce que la solution numérique approche les données expérimentales avec une grande précision, mais ce n'est pas ainsi que l'on améliore notre compréhension de la turbulence.

Par ailleurs, comme j'y ai fait allusion, les équations de Navier-Stokes ne constituent qu'un modèle mathématique de l'écoulement d'un fluide visqueux, et il n'est pas garanti que ce modèle soit toujours conforme à la réalité physique.

En premier lieu, le fait de manipuler une fonction dérivable $v(r, t)$ sous-entend qu'il existe un milieu uniforme où l'on peut en chaque point et à tout instant associer une vitesse. Or une situation plus conforme à la réalité est celle où de très nombreuses molécules se déplacent de façon désordonnée, échangeant entre elles quantité de mouvement et énergie. Au sens strict, la grandeur $v(r, t)$ représente en fait une moyenne sur toutes les molécules présentes dans un petit volume entourant le point r .