

injuste, sur les deux noms, seul celui de Stokes, en plus de celui de Navier, s'est imposé pour désigner les équations du mouvement d'un fluide.

Revenons aux difficultés associées aux équations de Navier-Stokes. L'une des principales concerne la turbulence, très souvent constatée dans les écoulements rapides. Le caractère fascinant et intrigant de ce phénomène peut être constaté sur une expérience très simple. Il suffit d'observer un lent écoulement d'eau dans un tube horizontal en verre auquel on ajoute une goutte colorée : la goutte s'étire en un fil qui, au bout d'une certaine distance, se met à tourbillonner et ainsi à se mélanger de façon chaotique avec l'eau. Le courant est devenu spontanément turbulent !

Un problème épineux : la turbulence

La turbulence est un phénomène auquel les physiciens et mathématiciens s'intéressent depuis longtemps, sans qu'ils soient parvenus à en proposer une explication et une description satisfaisantes. Cela n'empêche pas son exploitation par les ingénieurs. On sait par exemple qu'un sillage turbulent derrière un mobile entraîne une résistance, ou force de traînée, moins importante qu'un sillage laminaire (non turbulent). C'est pourquoi le profil des casques de moto modernes comporte des creux, qui rendent turbulent l'écoulement de l'air en aval du casque.

La turbulence est un phénomène qui met en jeu de multiples échelles de longueur, qui vont jusqu'à l'échelle microscopique. Or à cette échelle, la description d'un fluide en tant que milieu continu, qui est à la base des équations de Navier-Stokes, perd sa pertinence. Qui plus est, les méthodes numériques pour résoudre ces équations procèdent par discrétisation, un découpage de l'espace en petits volumes où l'écoulement est supposé uniforme – ce qui n'est pas une bonne approximation si l'écoulement est turbulent jusqu'à des échelles plus petites que celle de la discrétisation.

Il n'est donc pas du tout assuré que, dans des régimes turbulents, la résolution numérique des équations de Navier-Stokes fournisse des solutions qui ressemblent suffisamment au comportement réel du fluide. En fait, en simulation numérique, on s'appuie sur ce que l'on appelle des modèles de turbulence, où l'on intro-



4. UN VENT FORT RENCONTRANT UNE ÎLE subit des turbulences et forme un sillage de tourbillons alternés visibles dans la couverture nuageuse. Les modèles météorologiques et climatiques utilisent eux aussi les équations de Navier-Stokes pour décrire et prévoir la circulation atmosphérique. Une illustration supplémentaire de l'importance de bien comprendre ces équations.

duit de façon *ad hoc*, phénoménologique, des paramètres censés englober les détails inaccessibles de la turbulence. Ces modèles, dont il existe des familles entières, aboutissent à des résultats plus ou moins utiles selon les champs d'application. Mais ils ne sont qu'un pis-aller en l'absence d'une véritable compréhension de la turbulence.

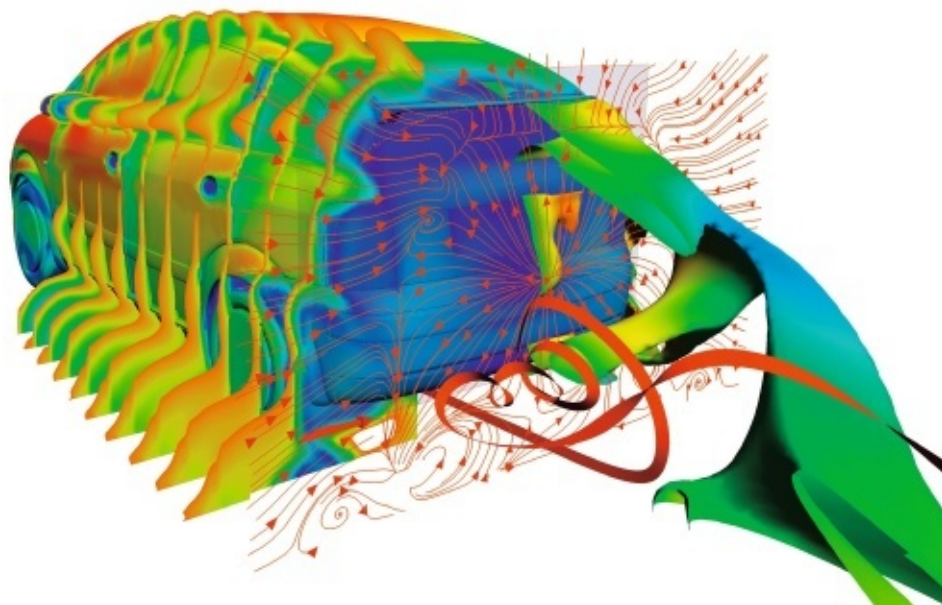
Il faut aussi souligner que les algorithmes numériques ne résolvent pas vraiment les équations de Navier-Stokes : ils visent des approximations des solutions de ces équations, en supposant que celles-ci existent. Par exemple, la discrétisation remplace les dérivées, mathématiquement définies par un passage à la limite, par de simples quotients de différences. Autrement dit, on remplace la question posée par une autre, plus simple et qui approche autant que possible la question originale, tout en espérant que la solution de ce nouveau problème sera elle aussi assez voisine de la solution de la question initiale. Cela doit cependant être prouvé au cas par cas.

Le modèle reflète-t-il la réalité ?

On croit souvent qu'une procédure fiable de vérification est de comparer les solutions numériques avec des données expérimentales. Mais il s'agit là d'une idée fausse. On peut certes ajuster progressivement un modèle de turbulence jusqu'à ce que la solution numérique approche les données expérimentales avec une grande précision, mais ce n'est pas ainsi que l'on améliore notre compréhension de la turbulence.

Par ailleurs, comme j'y ai fait allusion, les équations de Navier-Stokes ne constituent qu'un modèle mathématique de l'écoulement d'un fluide visqueux, et il n'est pas garanti que ce modèle soit toujours conforme à la réalité physique.

En premier lieu, le fait de manipuler une fonction dérivable $v(r, t)$ sous-entend qu'il existe un milieu uniforme où l'on peut en chaque point et à tout instant associer une vitesse. Or une situation plus conforme à la réalité est celle où de très nombreuses molécules se déplacent de façon désordonnée, échangeant entre elles quantité de mouvement et énergie. Au sens strict, la grandeur $v(r, t)$ représente en fait une moyenne sur toutes les molécules présentes dans un petit volume entourant le point r .



Martin Schütz, Science+Computing AG, Tübingen

5. L'ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT DE L'AIR ET DE LA FORCE DE TRAÎNÉE que cet écoulement engendre est importante pour la tenue de route des véhicules. La modélisation de l'écoulement est surtout très complexe à l'arrière du véhicule, et une procédure dérivée de la théorie cinétique des gaz se révèle plus appropriée qu'une résolution approchée des équations de Navier-Stokes.

En effet, il est possible de s'appuyer sur une description de nature microscopique pour aboutir aux équations de Navier-Stokes, moyennant certaines approximations. On peut en particulier s'appuyer sur la théorie cinétique des gaz, élaborée par le physicien autrichien Ludwig Boltzmann (1844-1906), qui donne une description probabiliste et statistique de ce qui se passe à l'échelle moléculaire. Mais le passage de l'échelle moléculaire à des moyennes définies en tout point est délicat, et il n'est pas sûr que la viscosité d'un fluide autre qu'un gaz parfait soit correctement décrite par le terme correspondant dans les équations de Navier-Stokes. Peut-être faut-il aller au-delà des dérivées d'ordre deux et inclure des dérivées d'ordre supérieur pour une modélisation plus précise ?

Il y a quelques années, le mathématicien tchèque Jindřich Nečas (1929-2002) a proposé un modèle alternatif de la viscosité avec l'espoir de prouver l'existence de solutions pour les équations ainsi modifiées. Il n'y est cependant pas parvenu, et les équations de Navier-Stokes représentent toujours la meilleure modélisation dont nous disposons.

Comme un énoncé d'existence et d'unicité des solutions semble pour le moment hors de portée, les mathématiciens se concentrent sur des objectifs intermédiaires. Par exemple, existe-t-il une solution manifestement non physique des

équations de Navier-Stokes ? Si tel était le cas, il apparaîtrait clairement que ces équations ne constituent pas une description adéquate de la réalité. Si, au contraire, on réussissait à exclure qu'apparaissent certaines solutions non physiques, on s'approcherait un peu plus de la preuve recherchée.

Une solution non physique serait, par exemple, une solution pour laquelle les énergies cinétique et potentielle du système augmentent. En effet, puisque les frottements dissipent de l'énergie cinétique en chaleur, la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle doit rester inférieure, ou au plus égale, à sa valeur initiale. Il est relativement facile de prouver que cela est le cas pour les équations de Navier-Stokes.

Des solutions qui explosent...

Une autre situation non physique correspondrait à une concentration de l'énergie du système au voisinage d'un seul point, la densité d'énergie tendant ainsi vers l'infini en ce point. Les spécialistes nomment *blow-up* (explosion) ce cas de figure.

Pour mieux comprendre ce problème, faisons l'expérience de pensée suivante : avec une grande cuillère, on imprime un mouvement de rotation à l'eau dont un seau est rempli. Une fois la rotation lancée, nous définissons à un certain instant

l'écoulement rotatif obtenu comme étant les conditions initiales des équations de Navier-Stokes. En un point quelconque du seau, la vitesse du fluide peut-elle augmenter sans limite et ainsi donner lieu à un *blow-up* ? Un tel comportement n'a, bien entendu, jamais été observé. Mais y a-t-il pour autant, dans les équations, une propriété qui empêcherait le développement d'un tel *blow-up* ?

Les mathématiciens connaissent en effet d'autres équations différentielles non linéaires qui présentent des phénomènes non physiques de *blow-up*. C'est d'ailleurs le cas des équations d'Euler : par exemple, il en existe des solutions qui correspondent à une évolution explosive du fluide, alors que ce dernier est initialement partout immobile !

Sauf dans quelques rares situations extrêmement simples, on ne sait pas trouver de solutions mathématiquement explicites (c'est-à-dire non numériques) aux équations de Navier-Stokes. Aussi, pour rechercher des solutions ou pour les caractériser même sans les avoir trouvées, les mathématiciens sont obligés de recourir à des voies indirectes.

Par exemple, ils considèrent qu'*a priori* une solution des équations est une certaine fonction appartenant à un espace fonctionnel approprié, c'est-à-dire un espace abstrait de dimension généralement infinie dont les points sont des fonctions ayant des propriétés pas trop restrictives. En se déplaçant continûment dans cet espace, on passe continûment d'une fonction à une autre. Et pour que l'on puisse comparer des fonctions et considérer des suites de fonctions, l'espace fonctionnel doit être muni d'une notion de distance et de limite.

Dans un premier temps, les mathématiciens ont choisi des espaces fonctionnels dont les éléments sont des fonctions suffisamment régulières (ce qui signifie par exemple des fonctions dérivables plusieurs fois). Mais cela s'est révélé insuffisant et il a fallu se placer dans des espaces plus vastes, contenant aussi des fonctions discontinues ou non différentiables.

En considérant non pas ces fonctions au sens strict, mais les intégrales de leur produit avec une « fonction test » (une fonction en partie arbitraire, ayant toutefois des propriétés telles que l'intégrale considérée a toujours une valeur bien définie), on parvient à une notion de « solution faible » des équations de Navier-Stokes,