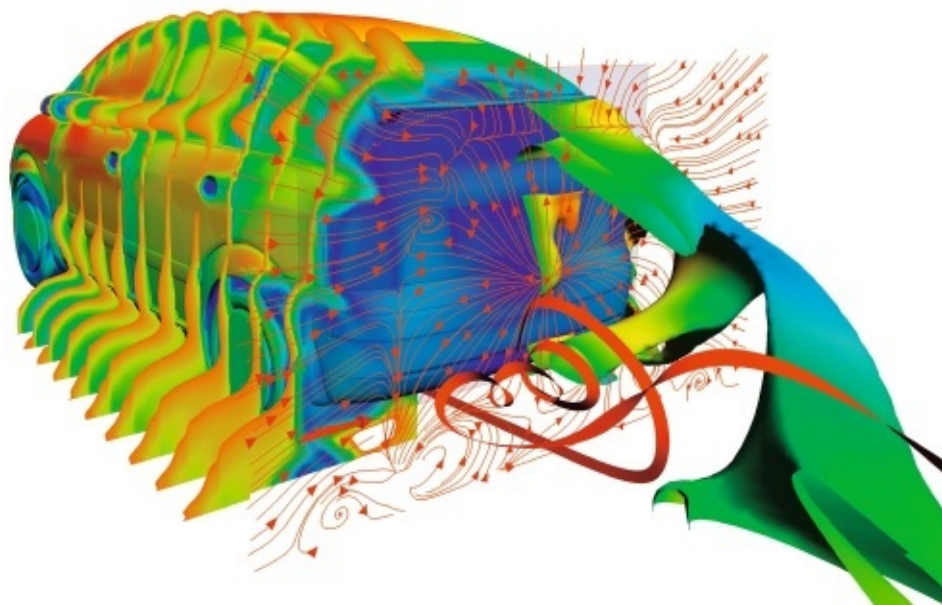




Martin Schütz, Science+Computing AG, Tübingen

5. L'ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT DE L'AIR ET DE LA FORCE DE TRAÎNÉE que cet écoulement engendre est importante pour la tenue de route des véhicules. La modélisation de l'écoulement est surtout très complexe à l'arrière du véhicule, et une procédure dérivée de la théorie cinétique des gaz se révèle plus appropriée qu'une résolution approchée des équations de Navier-Stokes.

En effet, il est possible de s'appuyer sur une description de nature microscopique pour aboutir aux équations de Navier-Stokes, moyennant certaines approximations. On peut en particulier s'appuyer sur la théorie cinétique des gaz, élaborée par le physicien autrichien Ludwig Boltzmann (1844-1906), qui donne une description probabiliste et statistique de ce qui se passe à l'échelle moléculaire. Mais le passage de l'échelle moléculaire à des moyennes définies en tout point est délicat, et il n'est pas sûr que la viscosité d'un fluide autre qu'un gaz parfait soit correctement décrite par le terme correspondant dans les équations de Navier-Stokes. Peut-être faut-il aller au-delà des dérivées d'ordre deux et inclure des dérivées d'ordre supérieur pour une modélisation plus précise ?

Il y a quelques années, le mathématicien tchèque Jindřich Nečas (1929-2002) a proposé un modèle alternatif de la viscosité avec l'espoir de prouver l'existence de solutions pour les équations ainsi modifiées. Il n'y est cependant pas parvenu, et les équations de Navier-Stokes représentent toujours la meilleure modélisation dont nous disposons.

Comme un énoncé d'existence et d'unicité des solutions semble pour le moment hors de portée, les mathématiciens se concentrent sur des objectifs intermédiaires. Par exemple, existe-t-il une solution manifestement non physique des

équations de Navier-Stokes ? Si tel était le cas, il apparaîtrait clairement que ces équations ne constituent pas une description adéquate de la réalité. Si, au contraire, on réussissait à exclure qu'apparaissent certaines solutions non physiques, on s'approcherait un peu plus de la preuve recherchée.

Une solution non physique serait, par exemple, une solution pour laquelle les énergies cinétique et potentielle du système augmentent. En effet, puisque les frottements dissipent de l'énergie cinétique en chaleur, la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle doit rester inférieure, ou au plus égale, à sa valeur initiale. Il est relativement facile de prouver que cela est le cas pour les équations de Navier-Stokes.

Des solutions qui explosent...

Une autre situation non physique correspondrait à une concentration de l'énergie du système au voisinage d'un seul point, la densité d'énergie tendant ainsi vers l'infini en ce point. Les spécialistes nomment *blow-up* (explosion) ce cas de figure.

Pour mieux comprendre ce problème, faisons l'expérience de pensée suivante : avec une grande cuillère, on imprime un mouvement de rotation à l'eau dont un seau est rempli. Une fois la rotation lancée, nous définissons à un certain instant

l'écoulement rotatif obtenu comme étant les conditions initiales des équations de Navier-Stokes. En un point quelconque du seau, la vitesse du fluide peut-elle augmenter sans limite et ainsi donner lieu à un *blow-up* ? Un tel comportement n'a, bien entendu, jamais été observé. Mais y a-t-il pour autant, dans les équations, une propriété qui empêcherait le développement d'un tel *blow-up* ?

Les mathématiciens connaissent en effet d'autres équations différentielles non linéaires qui présentent des phénomènes non physiques de *blow-up*. C'est d'ailleurs le cas des équations d'Euler : par exemple, il en existe des solutions qui correspondent à une évolution explosive du fluide, alors que ce dernier est initialement partout immobile !

Sauf dans quelques rares situations extrêmement simples, on ne sait pas trouver de solutions mathématiquement explicites (c'est-à-dire non numériques) aux équations de Navier-Stokes. Aussi, pour rechercher des solutions ou pour les caractériser même sans les avoir trouvées, les mathématiciens sont obligés de recourir à des voies indirectes.

Par exemple, ils considèrent qu'*a priori* une solution des équations est une certaine fonction appartenant à un espace fonctionnel approprié, c'est-à-dire un espace abstrait de dimension généralement infinie dont les points sont des fonctions ayant des propriétés pas trop restrictives. En se déplaçant continûment dans cet espace, on passe continûment d'une fonction à une autre. Et pour que l'on puisse comparer des fonctions et considérer des suites de fonctions, l'espace fonctionnel doit être muni d'une notion de distance et de limite.

Dans un premier temps, les mathématiciens ont choisi des espaces fonctionnels dont les éléments sont des fonctions suffisamment régulières (ce qui signifie par exemple des fonctions dérivables plusieurs fois). Mais cela s'est révélé insuffisant et il a fallu se placer dans des espaces plus vastes, contenant aussi des fonctions discontinues ou non différentiables.

En considérant non pas ces fonctions au sens strict, mais les intégrales de leur produit avec une « fonction test » (une fonction en partie arbitraire, ayant toutefois des propriétés telles que l'intégrale considérée a toujours une valeur bien définie), on parvient à une notion de « solution faible » des équations de Navier-Stokes,

l'ensemble des solutions faibles englobant celui des solutions régulières.

En 1933 et 1934, le mathématicien français Jean Leray a pu prouver l'existence de telles solutions faibles. Il a aussi démontré l'existence et l'unicité de solutions régulières, mais seulement pour des temps finis, c'est-à-dire sans pouvoir garantir que ces solutions ne deviennent pas singulières au bout d'un temps suffisamment long.

Trente ans plus tard, en 1964, les Japonais Hiroshi Fujita et Tosio Kato ont étendu le résultat de Leray avec une méthode beaucoup plus robuste, que nombre de mathématiciens ont adoptée. Les deux chercheurs ont ainsi prouvé l'existence et l'unicité de solutions régulières globalement en temps, mais pour des données petites (fluide proche de l'immobilité).

Un autre résultat important a été obtenu avec une méthode similaire à celle de H. Fujita et T. Kato : vers 1993, Marco Cannone et Yves Meyer, de l'Université de Paris-Dauphine, avec Fabrice Planchon, de l'École polytechnique, ont prouvé

qu'il existe des solutions régulières globalement en temps, pour des données fortement oscillantes.

Plus récemment encore, vers 2010, Jean-Yves Chemin, à l'Université Pierre et Marie Curie, et Isabelle Gallagher, de l'Université Paris-Diderot, ont présenté des classes de données, ni forcément petites ni forcément oscillantes, pour lesquelles les équations de Navier-Stokes ont une solution régulière globalement, dans tout l'espace.

Malgré des progrès, le problème résiste

Malgré ces avancées et d'autres, on ne dispose pas encore d'un énoncé général d'existence et d'unicité de solutions régulières. Les tentatives ont jusqu'ici échoué, car en essayant de passer de solutions faibles à des solutions régulières, des singularités apparaissent, comme celle évoquée à propos du seau d'eau.

Certaines études se sont donc concentrées sur l'évaluation de la quantité de

points où des singularités peuvent se développer. En 1982, l'Argentin Luis Caffarelli, l'Américain Robert Kohn et le Canadien Louis Nirenberg ont montré que l'ensemble de ces points est au plus de mesure nulle (cela signifie qu'il y en a éventuellement une infinité, mais qu'ils sont infiniment plus rares que les points où la solution est régulière).

Ce résultat a été sensiblement amélioré vers 2003 par l'Espagnol Luis Escauriaza et les Russes Gregory Seregin et Vladimir Šverák, qui ont étudié la régularité locale des solutions faibles de Leray et établi un critère permettant d'affirmer qu'une solution conduise à un *blow-up*.

Pour résumer, deux solutions sont envisageables au problème proposé par l'Institut Clay. Soit on montre que, sous des hypothèses réalistes, une solution régulière des équations de Navier-Stokes existe pour tous les temps, soit, au contraire, que des singularités apparaissent en général. Dans tous les cas, le résultat représentera un progrès considérable dans l'étude de ces équations aux dérivées partielles. ■



le collège
universcience
universcience.fr

Conférences
Le mardi à 18 h 30
Cité des sciences et de l'industrie

Des chimistes dans la société

À l'occasion de l'année internationale de la chimie, des chercheurs présentent une chimie au service de l'Homme.

10 mai
Comment parler de la chimie ? Ni en bien, ni en mal !
Pierre Laszlo, professeur de chimie honoraire à l'école polytechnique et à l'université de Liège.

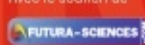
17 mai
D'où vient la peur de la chimie ?
Bernadette Bensaude-Vincent, professeure d'histoire et de philosophie des sciences à l'université de Paris-I Panthéon-Sorbonne.

24 mai
La chimie, pour percer le secret des œuvres d'art
Philippe Walter, directeur de recherche au CNRS, codirecteur du laboratoire du Centre de recherche et de restauration des musées de France.

31 mai
Les bioraffineries du futur
Franck Dumeignil, professeur des universités, membre de l'Institut universitaire de France, unité de catalyse et de chimie du solide, université de Lille.

Auditorium, entrée libre dans la limite des places disponibles
Programme complet : universcience.fr

Avec le soutien de



Le mégaséisme

Pierre Henry

Les sismologues n'avaient prévu ni le mégaséisme qui a secoué la grande île de Honshu au Japon, ni le raz de marée de 20 mètres de haut qui a suivi. Des mécanismes inédits jusqu'à présent sont en cause.

Le 11 mars 2011, une demi-heure après un mégaséisme, un raz de marée frappe la côte Nord-Est de la grande île nipponne de Honshu. Il atteint 20 mètres de haut face à certains endroits encaissés et 10 mètres à Sendai, la plus grande ville de la région. Ces amplitudes expliquent la terrible dévastation due à la vague, mais elles sont relativement modestes si l'on considère la violence inouïe du séisme qui l'a formée : sa magnitude est de 9, ce qui en fait le quatrième plus grand séisme jamais enregistré.

Pareille magnitude est une très mauvaise surprise : personne ne s'attendait à un séisme de cette ampleur à cet endroit. Comment cette possibilité a-t-elle pu échapper à la vigilance des sismologues, notamment de ceux qui furent consultés lors de l'implantation des centrales nucléaires de la région, dans les années 1970 ? Nous expliquons ici les origines de cette erreur d'appréciation et les implications de la nouvelle vision sismologique de la région qui émerge aujourd'hui.

Les Japonais nomment le tremblement de terre du 11 mars 2011 séisme du Tohoku. Ce terme, qui signifie Nord-Est en japonais, désigne la partie Nord de la grande île de Honshu secouée par le séisme. Bien connue pour sa constante activité sismique, la zone dont il provient – la fosse du Japon – se trouve au Nord du point triple du Japon, lieu où se rencontrent les plaques eurasiennne, philippine et pacifique (voir la figure 2). La subduction (plongement d'une plaque sous une autre) qui s'y produit depuis des millénaires engendre de nombreux séismes, parfois accompagnés d'importants tsunamis. Ainsi,



1. LE TSUNAMI DU 11 MARS 2011, consécutif à un mégaséisme, a emporté de nombreuses maisons de la ville japonaise de Natori, qui comptait plus de 72 000 habitants. Ces derniers n'ont eu que 30 minutes pour se mettre en sécurité après que le quatrième plus puissant séisme jamais enregistré a secoué leur ville.