

Une animation de cette idée (cette fois en perspective conique et non plus en perspective cavalière) a été réalisée par Francesco De Comité, de l'Université de Lille, et se trouve sur la page : <http://www.flickr.com/photos/fdecomite/sets/72157626054113902/>.

Des fractales impossibles

Une figure peut être infinie parce qu'elle s'étend (potentiellement) sans limites du fait de sa structure répétitive, ou, en termes savants, du fait de son invariance par translation selon une ou deux directions. Cependant, à côté de cet infiniment grand auquel la géométrie nous a accoutumés depuis plus de deux millénaires, un autre infini géométrique a été mis en évidence, celui des fractales.

Le terme créé en 1974 par Benoît Mandelbrot (1924-2010) désigne de manière générale toute figure ou objet infiniment découpé ou fractionné. Ces constructions possèdent souvent une symétrie interne : on retrouve en elles-mêmes leur forme globale en plus petit, à la façon de poupées russes : en termes savants, elles présentent une invariance par homothétie.

Rappelons que leur première apparition s' st produite il y a maintenant plus d'un siècle, quand les mathématiciens cherchaient à élucider la structure fine du continu, c'est-à-dire de la droite géométrique. Cantor a découvert autour de 1870 ce que l'on dénomme aujourd'hui l'ensemble triadique de Cantor ou pouss re de Cantor : partant d'un segment, on en retire le tiers médian, ce qui donne deux segments, dont on retire le tiers médian, ce qui en donne quatre segments, etc.

Les courbes de Peano (1890), puis le flocon de von Koch (1905) rendent visibles des singularités topologiques que l'on pensait impossibles : des courbes passant par chaque point d'un carré plein, des courbes sans tangentes, des courbes de longueur infinie délimitant une aire bornée, etc.

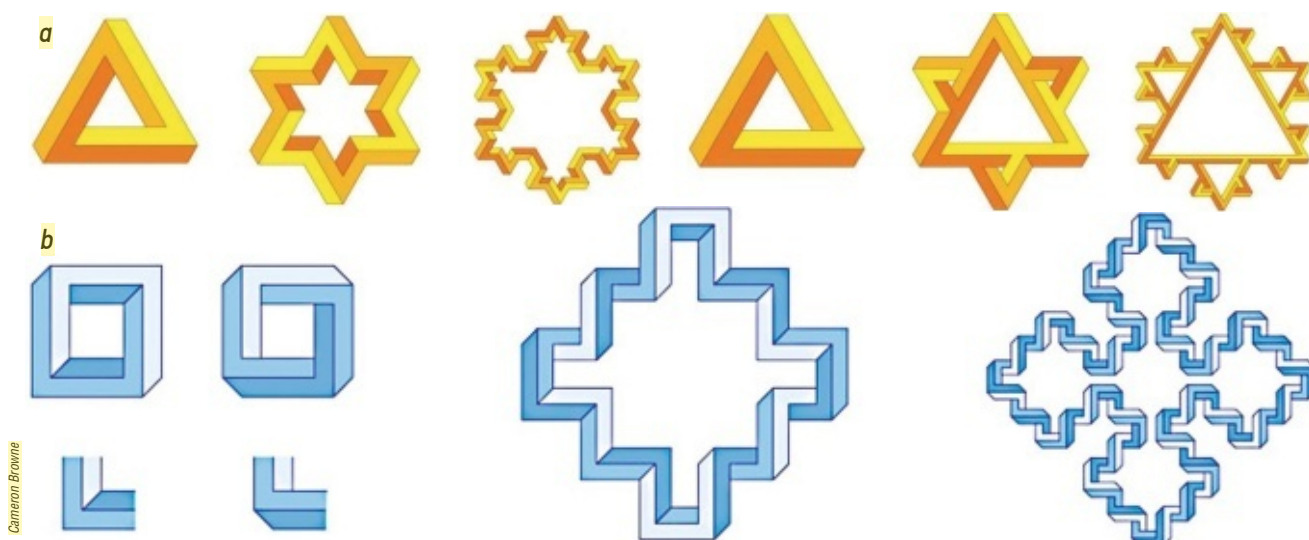
En géométrie classique, on assimile l'espace physique à l'ensemble des couples de nombres réels (pour le plan) ou à l'ensemble des triplets de nombres réels (pour l'espace). C'est bien commode et cette conception nous a permis de comprendre des notions comme la continuité, la vitesse, l'accélération, la connexité, etc.

Cependant, la mécanique quantique et l'impossibilité pratique de descendre

L'AUTEUR

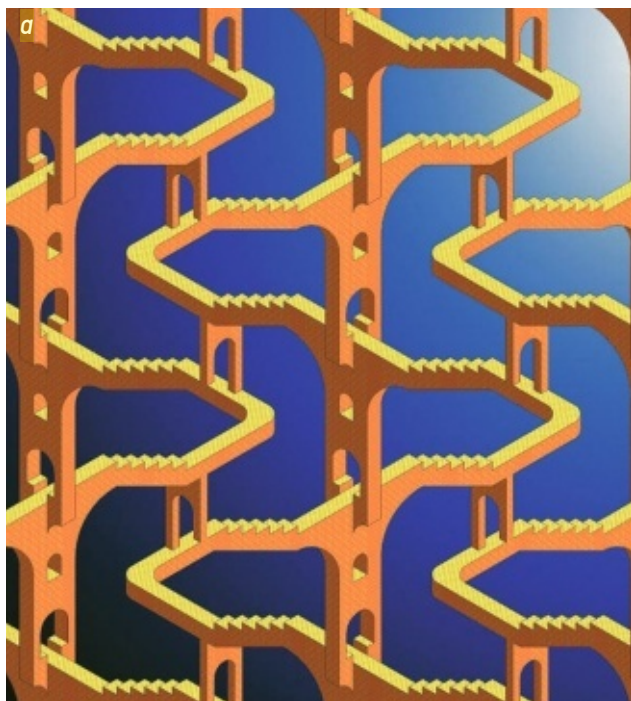


Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

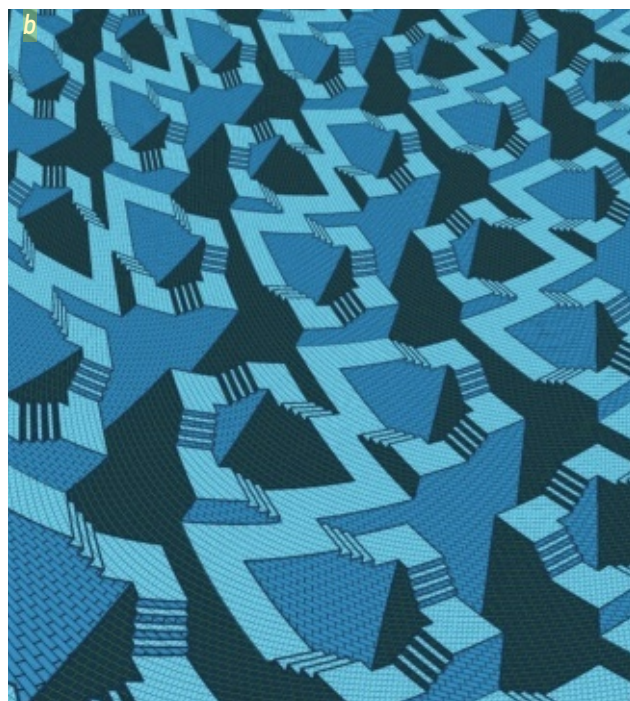


4. LA LIMITE DE L'IMPOSSIBLE. En combinant un schéma de figure impossible avec l'algorithme de construction du flocon de von Koch, le spécialiste d'informatique graphique Cameron Browne a obtenu une suite infinie (a) de figures impossibles (du moins au premier abord) conver-

geant vers le flocon de von Koch. Or dans l'espace euclidien des mathématiciens, ce flocon est une figure possible, sans recourir à aucune astuce. Un second exemple de suite de figures impossibles dont la limite est possible est obtenu en partant d'un carré (b).



5. POUR MONTER, IL SUFFIT DE DESCENDRE. Ces impossibles infinis de Jos Leys sont construits en partant d'un motif d'escalier paradoxal à la Escher qui s'accroche à lui-même. On obtient ainsi un dessin périodique



d'escalier ascendant... qui descend. L'escalier infini aurait dû figurer sur les armoiries du surintendant Fouquet : *Quo non ascendet* ? Croyant monter dans l'estime de Louis XIV, Fouquet en est descendu.

très loin dans l'infiniment petit font douter de la validité de ce modèle de l'espace fondé sur les nombres réels : il se pourrait que les objets infiniment découpés de la géométrie fractale soient des illusions théoriques du seul fait de leur finesse sans limite. Nous ne prendrons pas en compte cette objection et nous admettrons que le modèle classique de l'espace est conforme à celui du monde physique réel et que les fractales sont physiquement possibles.

L'impossibilité disparaît à la limite

N'existe-t-il pas alors des objets infiniment impossibles de taille bornée ? L'infinie impossibilité de leur structure ne serait plus, comme dans le cas des images de J. Leys, due à leur étendue illimitée (dont la feuille de papier ne rend d'ailleurs qu'imparfaitement l'image), mais se trouverait dans la finesse sans limites de leur organisation paradoxale.

Cameron Browne, de l'*Imperial College* de Londres, a répondu positivement à la question en proposant plusieurs images réalisées à l'aide de programmes informatiques. Il combine dans les images produites le découpage infini des fractales et des objets invariants par homothétie avec l'impossibilité des figures du type triangle de Penrose.

La figure 4 montre les étapes de construction d'un flocon de von Koch, l'un à l'intérieur totalement vide, l'autre avec des barres de supports internes. Le schéma utilisé par C. Browne est tel que chaque étape de construction est une figure impossible. Les figures limites de ces séries seraient donc des figures fractales cumulant les impossibilités introduites étape par étape.

Phénomène amusant : la limite du dessin n'est rien d'autre que le flocon lui-même (ou sa variante avec des tracés internes) : nous avons donc une série d'images impossibles dont la limite est possible. Le cumul d'une infinité d'impossibilités fait dispa-

raître l'absurdité, qui est comme avalée par le passage à la limite !

L'une des figures impossibles les plus populaires est la fourche à deux et trois bouts, ou diapason absurde. C. Browne en a conçu plusieurs versions infinies en utilisant l'idée de la poussière de Cantor (voir la figure 6a).

Fourche impossible à la Cantor

Cette fois, l'impossibilité présente à chaque étape de la construction se retrouve dans la figure limite qui n'est pas dessinée, mais que nous imaginons sans mal. En effet, à mesure qu'on s'éloigne de la partie pleine (*en haut*), la section de l'objet représenté devient de plus en plus évidée : on en retire le tiers médian, puis on retire le tiers médian des deux parties restantes, etc. Pourtant, à l'extrémité basse de la pièce (*en bas*), celle-ci est pleine. Nous en tirons la leçon qu'en passant à la limite, l'impossibilité d'une figure fractale peut persister.