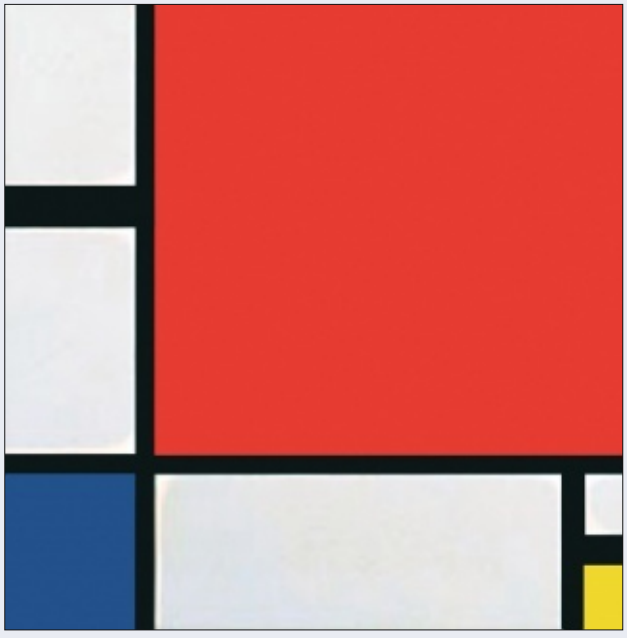
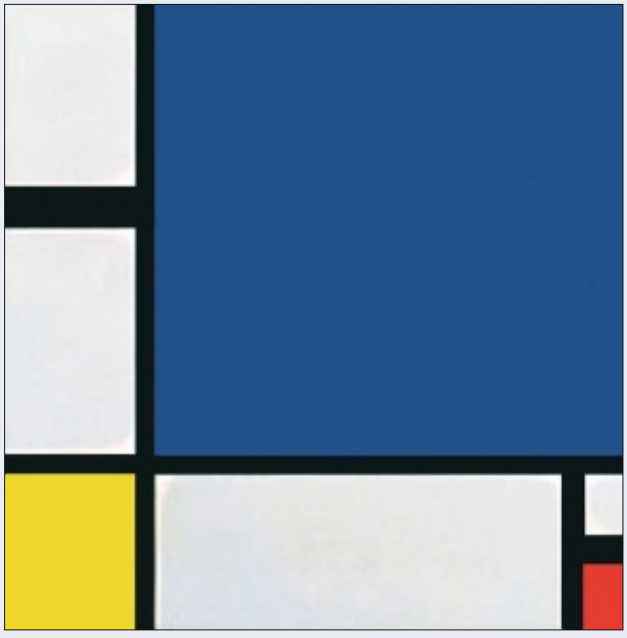
1. La permutation circulaire





La question posée est : quel est le minimum d'affectations dont on a besoin dans un calcul *in situ* pour échanger circulairement les contenus de trois variables A, B, C, (A, B, C) devenant (B, C, A) ? Dans le tableau de Mondrian et son faux, trois couleurs ont été ainsi permutées. Petit exercice : quel est le vrai, quel est le faux ?

Notons d'abord que trois affectations ne suffiront pas. Il faudrait en effet, dès la première affectation, placer une bonne valeur là où on fait l'affectation, ce qui ferait disparaître la valeur qui y est stockée, dès lors irrécupérable.

En revanche, réaliser la permutation circulaire avec quatre affectations est possible, donc 4 est le nombre minimum d'affections nécessaires à la permutation circulaire de trois nombres. Voici la solution en quatre affectations :

	A	B	C
Au départ	A	B	C
A := A + B + C	A+B+C	B	C
C := A – B – C	A+B+C	B	A
B := A – B – C	A+B+C	C	A
A := A – B – C	B	C	A

Le procédé se généralise pour opérer une permutation circulaire entre n mémoires, c'est-à-dire pour passer de $(A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n)$ à $(A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_nA_1)$.

À la première étape, on place dans A_1 la somme $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1} + A_n$, puis, à chaque étape, toutes les valeurs initiales des variables sont présentes dans $A_2, A_3, \ldots A_{n-1}, A_n$ sauf une, ce qui permet, grâce à A_1, de la placer au bon endroit.

	A_1	A_2	A_3	.....	A_{n-1}	A_n
Au départ	A_1	A_2	A_3	.....	A_{n-1}	A_n
$A_1 := A_1 + A_2 + \ldots + A_n$	$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$	A_2	A_3	.....	A_{n-1}	A_n
$A_n := A_1 - A_2 - \ldots - A_n$	$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$	A_2	A_3	.....	A_{n-1}	A_1
$A_{n-1} := A_1 - A_2 - \ldots - A_n$	$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$	A_2	A_3	.....	A_n	A_1
.....	.....	...	...	.....	...	...
$A_1 := A_1 - A_2 - \ldots - A_n$	A_2	A_3	A_4		A_n	A_1

L'affectation opérée pour A_n place donc bien la valeur initiale de A_1 en A_n, puis l'affectation opérée pour A_{n-1} place donc bien la valeur initiale de A_2 en A_{n-1}, etc. Le calcul est présenté avec des + et des –, et fonctionne avec des nombres entiers, réels ou même complexes.

Le calcul s'adapte aussi avec des nombres calculés modulo k, ou aux variables booléennes (en remplaçant les + et les – par *xor*, ce qui correspond d'ailleurs au + quand on calcule modulo 2). Cette remarque est importante car elle permet de répondre à une objection naturelle, mais essentielle, à la méthode proposée pour opérer une permutation circulaire de n entiers.

Voici l'objection : quand on calcule avec des entiers, la méthode de calcul *in situ* proposée triche, car elle stocke dans A_1 la somme des valeurs de toutes les variables, ce qui exige un espace mémoire plus grand pour la variable A_1 : s'il y a par exemple 10 variables variant entre 0 et 10, il faut pour stocker A_1 une variable capable de recevoir toutes les valeurs entre 0 et 100.

Voici la réponse à l'objection. Oui, cela est vrai pour la méthode avec des + et des –, c'est-à-dire avec les opérations arithmétiques habituelles entre nombres entiers. Cependant, puisqu'on peut mener un calcul modulo k (où k est un entier fixé), on dispose dans ce cas d'une méthode qui n'utilise pas plus d'espace pour A_1.

Une autre idée pour répondre à l'objection consiste à écrire les nombres entiers en base 2 et, au lieu de faire des additions ou des soustractions entre deux nombres X et Y, on calcule le nombre dont les chiffres binaires sont ceux obtenus en faisant le *xor* entre les chiffres binaires de X et de Y (exemple 1001 xor 0111 = 1110, autrement dit, 9 xor 7 = 14) et l'on retombe bien sur ses pieds à la fin.

L'espace nécessaire pour stocker A_1 reste encore identique à celui nécessaire pour stocker chaque nombre (p chiffres binaires par exemple si on manipule des nombres de p chiffres binaires). Les procédés décrits (traduits avec des calculs modulo k ou des *xor*) réalisent donc un calcul *in situ* sans avoir à considérer un espace mémoire particulier pour A_1.

L'AUTEUR

Jean-Paul DELAHAYE
est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

qui peut être un ensemble de nombres, ou de lettres ou de codes numériques chargés de représenter informatiquement des objets réels. On se donne aussi un nombre entier n et une application F de S^n dans S^n, c'est-à-dire une transformation qui à tout n-uplet d'éléments de S en associe un autre. Dans l'exemple de la permutation circulaire, l'application F de S^3 dans S^3 est celle qui, à tout triplet de valeurs (A, B, C), associe (B, C, A).

Calcul *in situ* général

Quand on considère des variables booléennes, cela signifie que chaque élément de S est 0 ou 1. En plus du cas booléen, nous envisagerons deux autres cas finis. Si nous calculons avec des nombres entiers écrits en binaire avec k chiffres alors les éléments de S sont 0, 1, 2, ..., $2^k - 1$; si nous calculons modulo p (nous remplaçons chaque nombre par son reste lors de la division par p), les éléments de S sont 0, 1, ..., $p - 1$.

Dans le cas général, un calcul *in situ* pour une application F est une suite d'affectations analogues à celles que nous avons utilisées dans les exemples. Ces affectations sont envisagées une à une et chacune attribue une valeur nouvelle à l'une des variables dont l'ancienne valeur est donc perdue... c'est tout le problème ! La valeur nouvelle ne dépend que des valeurs disponibles à cet instant du calcul et nous nous imposons, dans le calcul *in situ*, de n'utiliser aucune variable supplémentaire.

Pour la permutation circulaire de n variables proposée dans l'encadré 1, nous considérons l'opération :

$F : (A_1, A_2, \ldots, A_n) \rightarrow (A_2, \ldots, A_n, A_1)$.

La méthode proposée montre que $n + 1$ affectations suffisent pour réaliser cette permutation circulaire, sans que nous n'utilisions aucune autre variable que celles données, et sans que nous ayons à stocker dans les variables des nombres plus grands que $2^k - 1$ dans le cas des nombres en binaire, ou que $p - 1$ dans le cas du calcul modulo p. L'encadré 2 explique que lorsqu'on se donne des variables où l'on peut mémoriser des entiers sans limitation de taille (ce qui est irréaliste en informatique), alors toute affectation F de S^n dans S^n se calcule *in situ* en au plus $n + 1$ affectations.

Cette valeur de $n + 1$, valable pour les permutations circulaires de n variables et pour les transformations F quelconques quand nous utilisons des variables non bornées, n'est pas générale. Pour la transformation $F(A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_2, A_1, A_4, A_3)$, on ne sait pas faire mieux que six affectations pour un calcul *in situ* avec des variables bornées.

Les programmes *in situ*, surtout s'ils sont courts, devraient aider à concevoir des puces électroniques moins gourmandes en mémoire, ce qui augmentera la rapidité du calcul. En effet, calculer «localement» est souvent plus efficace pour un processeur que de faire des requêtes aux mémoires externes qu'on doit associer à l'utilisation de variables auxiliaires.

Cette économie de mémoire entraîne un allongement de la taille des programmes. C'est là un nouvel exemple d'une règle générale rencontrée en maintes occasions en informatique : pour économiser de la mémoire, il faut parfois complexifier le calcul. Les algorithmes de compression

2. Calcul *in situ* dans le cas infini

Au départ, nous avons un n-uplet : $(A_1, A_2, ..., A_n)$. Les variables $A_1, A_2, ..., A_n$, sont choisies dans un ensemble S non borné, par exemple l'ensemble des entiers.

Une application F attribue de nouvelles valeurs aux variables $A_1, A_2, ..., A_n$ qui deviennent $B_1, B_2, ..., B_n$.

Utilisons des variables où nous pouvons mémoriser des entiers sans limitation de taille et voyons comment il a été démontré, dans ce cas particulier, que toute application F peut se calculer *in situ* en au plus $n + 1$ affectations. Pour que le calcul soit *in situ*, nous devons tenir compte du fait que lorsque nous mettrons une valeur dans A_i, celle-ci écrasera l'ancienne valeur dès lors indisponible. Pas question donc d'écrire un programme du type :

$A_1 := E_1(A_1, A_2, ..., A_n), A_2 := E_2(A_1, A_2, ..., A_n), ..., A_n := E_n(A_1, A_2, ..., A_n)$.

L'idée du calcul est de remplacer A_1 par $A' = 2^{A_1} 3^{A_2} ... p_n^{A_n}$, où la suite p_i désigne la suite des nombres premiers (2, 3, 5, 7, ...). Cette étape réunit dans A_1 toute l'information contenue dans les variables $A_1, A_2, ..., A_n$. Pour récupérer A_i à partir de A', on calculera le nombre de fois que A' est divisible par p_i. Le fait de placer B_2 dans la variable A_2 ne fait pas perdre l'information A_2, car celle-ci reste présente, mêlée aux autres valeurs dans A'. On peut alors calculer tous les nouveaux A_i en récupérant toutes les valeurs des anciens A_i dans A', puis en utilisant l'application adéquate. À l'étape $n + 1$, on calcule A_1 en fonction de A'.

Comme nous avons regroupé et codé (avec la décomposition en facteurs premiers) toutes les valeurs de $A_1, A_2, ..., A_n$ dans A', nous n'avons pas besoin de mémoire supplémentaire et nous gardons à portée de main durant le calcul toutes les valeurs initiales des variables mises «au chaud». Bien sûr, cette astuce ne fonctionne pas en informatique où chaque variable ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.