

4. Nouvelle décomposition de matrices pour le calcul *in situ*

La décomposition d'une application linéaire F en série d'affectations pour en tirer un programme *in situ* est toujours possible en $2n-1$ étapes, ce qui est très peu.

La lecture de ces $2n-1$ affectations (toutes linéaires aussi) s'interprète comme la décomposition de la matrice de départ en un produit de matrices simples : chacune est obtenue en modifiant une unique ligne à la matrice identité. C'est là un nouveau type de décomposition d'une matrice en produit de matrices simples.

Donnons un exemple avec un calcul modulo 2.

Nous voulons aboutir à l'affectation finale :

$$F(A, B, C, D) = (A + D, A + B + C, A + C + D, A + C).$$

Comme toute application linéaire, on peut l'écrire sous la forme du produit d'une matrice et d'un vecteur colonne.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+D \\ A+B+C \\ A+C+D \\ A+C \end{pmatrix}$$

L'application est définie par le vecteur colonne indiqué. Toutefois, le calcul ne peut se faire *in situ* d'un seul coup car, dès que l'on a remplacé A par $A + D$, il faut réaménager le calcul en fonction de cette nouvelle valeur de A , et ainsi de suite pour toutes les variables. Cela peut se faire en utili-

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+D \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \\ K &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+D \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+D \\ A+B+C+2D \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+D \\ A+B+C \\ C \\ D \end{pmatrix} \\ L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+D \\ A+B+C \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+D \\ A+B+C \\ A+C+D \\ D \end{pmatrix} \\ M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+D \\ A+B+C \\ A+C+D \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+D \\ A+B+C \\ A+C+D \\ A+C+2D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+D \\ A+B+C \\ A+C+D \\ A+C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sant des pseudomatrices unités où une seule ligne est transformée. Ainsi, la matrice F de la transformation est décomposée en un produit des matrices J, K, L et M , explicitées ci-dessus. On obtient avec ces matrices :

$$F(A, B, C, D) = MLKJ(A, B, C, D) = (A + D, A + B + C, A + C + D, A + C).$$

Puisqu'il faut $n + 1$ affectations pour une permutation circulaire entre n variables, il faut dans le pire cas (quand tous les cycles sont des cycles d'ordre 2) $3n/2$ affectations si n est pair, et $(3n - 1)/2$ affectations si n est impair. Dans le cas d'une permutation se décomposant en k cycles non réduits à un point, $c_1, c_2, \dots, c_k$ de longueurs $|c_1|, |c_2|, \dots, |c_k|$, le programme *in situ*, résultat de l'idée indiquée au-dessus, est composé de $k + |c_1| + |c_2| + \dots + |c_k|$ affectations. Ce nombre est le meilleur qu'on puisse obtenir. La décomposition d'une permutation quelconque de variables en un programme *in situ* de $3n/2$ opérations au plus permet d'échanger de l'information entre n fils qui ne peuvent pas se croiser (car placés sur un même plan), en utilisant $3n/2$ portes logiques *xor* au plus (voir l'encadré 3).

D'autres résultats ont été obtenus pour les applications linéaires. Tout d'abord sur des variables booléennes et plus généralement modulo p avec p premier (S. Burckel et Marianne Morillon) et par la suite sur des entiers modulo k , pour tout entier k fixé (Emmanuel Thomé). Un exemple est donné dans l'encadré ci-dessus.

Les résultats obtenus indiquent que toute transformation linéaire peut s'obtenir par un programme *in situ* comportant au plus $2n - 1$ affectations, chacune correspondant à une opération elle-même linéaire (comme dans l'exemple). De plus, on peut imposer l'ordre dans lequel se feront les affectations : 1, 2, ..., n , $n - 1$, ..., 2, 1 (affectation de la première variable, de la deuxième, etc.)

Trouver le simple est compliqué

Toute transformation n'est pas linéaire, aussi fallait-il étudier le cas général. Dans un premier temps, il a été établi que toutes les transformations bijectives (linéaires ou non) F de S^n dans S^n possédaient des programmes *in situ* et que $2n - 1$ affectations suffisent. S. Burckel et Emeric Gioan ont ensuite montré que $5n - 4$ affectations suffisent toujours, quelle que soit la complexité de F et cela même quand F n'est pas bijective. Lorsque le nombre d'éléments de S est une puissance de 2, on peut même descendre jusqu'à $4n - 3$.

Ces résultats récents améliorent un résultat précédent obtenu par S. Burckel et M. Morillon qui indiquait que n^2 affecta-

tions suffisaient dans le cas booléen. Le gain de n^2 à $4n - 3$ est considérable. Malheureusement, le calcul des décompositions est parfois très difficile et lorsque le nombre de variables est grand, on risque de se heurter à une impossibilité pratique. Autrement dit : la complexité des algorithmes pour calculer les décompositions les plus simples est grande. On a là, une fois encore, une illustration de la maxime « Trouver le simple est compliqué ».

Ces résultats ne donnent pas nécessairement les décompositions optimales, qui sont encore plus difficiles à trouver. Les explorations exhaustives sont en théorie envisageables, puisque nous sommes dans un cas fini. Elles garantissent de trouver les programmes *in situ* optimaux, mais elles sont si coûteuses en calcul qu'on ne peut les envisager que si n est vraiment petit (inférieur à 10). De nombreux résultats sont donc encore attendus dans ce domaine à la fois combinatoire, algébrique et algorithmique. Il est à parier qu'à mesure des perfectionnements apportés aux méthodes pratiques pour calculer les décompositions en programmes *in situ*, leur intérêt concret apparaîtra et leur utilisation se généralisera.

Rendez-vous sur www.pourlascience.fr

- Retrouvez gratuitement les actualités scientifiques quotidiennes.
- Recevez nos lettres d'information et réagissez aux articles en vous inscrivant sur le site.
- Recherchez et commandez les archives parues depuis 2004 de *Pour la Science* et des *Dossiers Pour la Science*.
- Accédez aux numéros numériques compris dans votre abonnement en créant votre compte.



À très bientôt sur www.pourlascience.fr !

POUR LA
SCIENCE.fr

Le site de référence de l'actualité scientifique