

Voici quelques observations sur les résultats obtenus :

– Pour les séquences prises en exemple au début de l'article, tout se passe bien. La séquence 0000000 est plus probable que 0001000, qui elle-même est plus probable que 1001101. Les complexités déduites des probabilités pour ces trois séquences sont conformes à ce que l'intuition exigeait.

– Chaque suite ayant une longueur comprise entre 1 et 8 est produite au moins une fois et le calcul approché avec les machines de Turing à quatre états lui attribue une probabilité non nulle, donc une complexité finie.

– Pour les 128 séquences déjà classées par les machines à trois états, le classement obtenu avec les machines à quatre états reste le même, sauf dans 17 cas. En général, les déplacements opérés entre les deux classements conduisent à des positions plus conformes à l'intuition. En considérant des machines à quatre états, on améliore ce qu'on avait obtenu avec les machines à trois états : c'est une validation de la méthode.

– Les séquences produites les plus longues ont pour longueur 16. En voici une : 1101010101010101. Bien sûr, ce sont des suites assez peu complexes, car les suites de longueur 16 les plus complexes ne sont pas produites par une machine de Turing à quatre états.

– En général, plus une séquence est longue, plus sa complexité est grande, mais ce n'est pas une règle absolue : par exemple, la séquence 0000000000 (dix fois le 0) est évaluée moins complexe que la séquence de neuf bits 000011100.

– De petites imperfections persistent. En passant de trois à quatre états, on a notablement progressé, mais pour avoir un classement parfait incluant par exemple toutes les séquences de longueur allant jusqu'à dix, il faudrait maintenant mener un calcul complet avec les machines à cinq états, à la limite de ce qu'on peut envisager aujourd'hui. On espère l'entreprendre prochainement. Bien sûr, il ne correspondra qu'à une marche de plus dans une quête infinie.

Pour disposer d'une méthode pratique qui attribue une complexité à toute séquence finie, il faut accepter d'associer plusieurs idées. Trois idées semblent suffire :

(a) Pour les séquences courtes (jusqu'à huit ou dix bits, peut-être un peu plus), la méthode des machines de Turing ;

(b) Pour les séquences de longueur moyenne (de dix bits à quelques centaines de bits) un découpage en tranches ramenant au cas précédent ;

(c) Pour les séquences plus longues, une méthode à base d'algorithmes de compression.

Recollement délicat

Le travail est délicat et on tombera sur des cas où l'évaluation sera peu satisfaisante. Mais le principe général semble acquis et tout n'est plus qu'une question de perfectionnement et d'efforts : prises en compte de machines de Turing ayant plus d'états ; utilisation simultanée d'une multitude d'algorithmes de compression, etc. Ces efforts n'auront jamais de fin, mais nous disposons maintenant de moyens pour le calcul de la complexité de Kolmogorov des séquences binaires de toutes les longueurs, moyens qu'on adaptera aux séquences plus générales de chiffres décimaux, de lettres, de nombres entiers, etc.

Aujourd'hui, une grande variété de méthodes spécifiques, fondées sur des principes particuliers et bien souvent *ad hoc* sont utilisées pour calculer et comparer des complexités d'objets discrets (voir deux exemples sur la figure 4). C'est le cas en informatique dans le domaine des algorithmes pour suites pseudo-aléatoires, en traitement d'images, en génétique, en linguistique, en psychologie, etc. Les avancées du programme de recherche décrit ici mettront à disposition de tous une méthode générale de calcul de la complexité de Kolmogorov qui, en plus d'être homogène (car l'unité de mesure est toujours le bit d'information), sera fondée sur ce qui est reconnu comme la théorie universelle de l'information. Cette théorie longtemps considérée comme inutilisable (du fait de l'existence de nombreux énoncés indécidables concernant $K(s)$) se révèle au fur et à mesure des années praticable et utile. Il est certain pourtant qu'on est loin d'en avoir tiré toutes les applications possibles. ■

L'AUTEUR



Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

✓ BIBLIOGRAPHIE

H. Zenil, **Pages Internet donnant accès aux articles cités ci-dessous** : <http://www.mathrix.org/zenil/>

H. Zenil et J.-P. Delahaye, **An algorithmic information theoretic approach to the behaviour of financial markets**, themed issue on « Nonlinearity, Complexity and Randomness », *Journal of Economic Surveys*, 2011.

H. Zenil, **Compression-based investigation of the dynamical properties of cellular automata and other systems**, *Journal of Complex Systems*, vol. 19(1), 2010 : <http://arxiv.org/abs/0910.4042>

J.-P. Delahaye et H. Zenil, **A glance into the structure of algorithmic complexity : Numerical evaluation of the complexity of short strings by small Turing machines**, 2011 : <http://arxiv.org/pdf/1101.4795>

J.-P. Delahaye et H. Zenil, **On the algorithmic nature of the world**, dans G. Dodig-Crnkovic et M. Burgin (éds.), *Information and Computation*, World Scientific, 2010.

J.-P. Delahaye et H. Zenil, **On the Kolmogorov-Chaitin complexity for short sequences**, *Randomness and Complexity : From Leibniz to Chaitin* (C.S. Calude, éd.), World Scientific, pp. 123-130, 2007.

J.-P. Delahaye, **Classer musiques, images, textes et génomes**, *Pour la Science*, pp.90-95, mars 2004.

ART & SCIENCE

Le ciel se couvre chez Murillo

Sur plusieurs tableaux peints entre le XVI^e et le XVIII^e siècle, le bleu est devenu gris. Dans le pigment utilisé – du smalt –, l'environnement des ions cobalt a été modifié par la fuite des ions potassium.

Loïc MANGIN

Le peintre baroque Bartolomé Esteban Murillo (1617-1682) est, avec Diego Velazquez, Francisco de Zurbarán et José de Ribera, l'un des plus célèbres représentants du Siècle d'or espagnol. Il fut le chef de file de l'école de Séville, second centre artistique de l'Espagne au XVII^e siècle après Madrid où domine Velazquez. Murillo doit sa renommée à plusieurs œuvres religieuses telle *La Vierge du Rosaire*, mais surtout à ses représentations de la vie quotidienne, notamment des portraits de femmes, de pauvres et de mendiants.

De tels sujets ne sont pas propices à une débauche de couleurs vives et, de fait, dans plusieurs tableaux de Murillo, la diversité des couleurs est minimale. Toutefois, certaines toiles n'étaient peut-être pas aussi sombres qu'elles ne l'apparaissent aujourd'hui. Ainsi en est-il de l'œuvre *Deux Trinités*, conservée à la *National Gallery*, à Londres (voir la figure c, page ci-contre). En effet, le ciel gris, au centre, était au départ plus clément, c'est-à-dire bleu. Comment expliquer un tel changement ?

Entre le XVI^e et le XVIII^e siècle, un pigment bleu souvent utilisé était le smalt. Or celui-ci est instable et se décolore en quelques années. Le phénomène était connu dès le XVII^e siècle et était mentionné dans les traités de peinture, mais son mécanisme a longtemps résisté aux explications. Une équipe internationale associant la plateforme européenne de recherche sur les matériaux anciens (IPANEMA), la *National*

Gallery et le C2RMF (CNRS/ministère de la Culture) vient de résoudre l'énigme.

Le smalt était obtenu à partir d'un minerai contenant du cobalt qui était mélangé à de la silice et à de la potasse pour former un verre coloré bleu. Celui-ci était ensuite broyé en une poudre d'un bleu d'autant plus intense que les grains étaient fins.

Depuis le Moyen Âge, la principale source du cobalt utilisé dans la préparation

La coordination tétraédrique des ions cobalt n'est plus assurée ; elle devient octaédrique, et le bleu vire au gris.

du smalt européen était la smaltite, une variété de skutterudite. Il s'agit d'une famille de minéraux cristallins constitués d'atomes de cobalt, de nickel et d'arsenic, dont un gisement important se trouvait près de la ville de Skutterud, en Norvège. À partir du XVI^e siècle, d'autres minerais de cobalt auraient été ajoutés, tels l'érythrite et la cobaltite. Que se passe-t-il dans le smalt une fois qu'il est appliqué sur la toile ?

Plusieurs hypothèses ont été proposées pour expliquer la décoloration, par exemple une migration des cations cobalt. Cependant, l'analyse de microéchantillons

(voir la figure a, où l'on distingue des grains plus ou moins préservés) par spectroscopie d'absorption X sur la station expérimentale LUCIA du synchrotron SOLEIL (CNRS/CEA) a montré que la décoloration résulte d'un changement d'environnement des ions cobalt. Notons que les investigations ont concerné, outre le Murillo, d'autres tableaux : deux de Paolo Veronese (*Les Dieux de l'Olympe* et *La Consécration de Saint-Nicolas*), un de François Lemoyne (*Hercule tuant Cacus*) et enfin, un de Paolo Fiammingo (*Paysage avec l'expulsion des Harpies*). Voyons en détail le mécanisme.

D'abord, la décoloration du smalt est corrélée à une perte de potassium, celui-ci représentant de 12 à 16 pour cent des échantillons bien préservés contre 1 à 2 pour cent dans les plus altérés. Cet appauvrissement en potassium se traduit par un blanchiment des grains lorsqu'ils sont observés par spectroscopie X (voir la figure b). Une telle fuite est connue dans les verres où les ions potassium, mobiles, sont facilement « lessivés » : ils sont remplacés par d'autres types d'ions. Dans la peinture, les ions potassium migraient et s'associaient avec les acides gras de l'huile pour former des savons qui diffusent ensuite vers la surface.

Dans le smalt, les ions cobalt Co^{2+} (les ions Co^{3+} ne sont pas stables à la température requise pour fondre le verre), forment des complexes avec quatre ligands.

La couleur bleue du cobalt dans le smalt est précisément due à cette coordination