

Des octonions pour la théorie des cordes

John Baez et John Huerta

D'après la théorie des cordes, l'Univers serait doté d'un espace-temps de dimension 10 ou 11. Un système de nombres découvert au XIX^e siècle et quelque peu oublié depuis en fournit peut-être l'explication la plus simple.

Enfants, nous avons tous appris à manier des nombres. On commence par compter, puis viennent l'addition, la soustraction, la multiplication et enfin la division. Mais les mathématiciens savent que le système de nombres qu'on nous enseigne à l'école n'est qu'une possibilité parmi bien d'autres. D'autres types de nombres sont importants pour comprendre la géométrie et la physique. L'une des alternatives les plus étranges est celle des octonions. Largement négligés depuis leur découverte en 1843, ils ont au cours des dernières décennies pris une importance étonnante dans la théorie des cordes. Et de fait, si la théorie des cordes constitue une représentation correcte de l'Univers, les octonions pourraient expliquer pourquoi l'Univers a le nombre de dimensions que lui attribue cette théorie.

Les octonions ne seraient pas le premier élément de mathématiques pures à être utilisé pour mieux comprendre le monde. Ce ne serait pas non plus le premier système alternatif de nombres à se révéler utile. Afin de comprendre pourquoi, considérons d'abord le jeu de nombres le plus simple, celui des «nombres réels». L'ensemble de tous les nombres réels pouvant se représenter sous la forme

d'une droite (*voir l'encadré page 73*), on peut dire que l'ensemble des nombres réels est unidimensionnel. On peut noter de même que la droite est unidimensionnelle parce que, pour en spécifier un point, il suffit d'un seul nombre réel.

Des imaginaires utiles

Jusqu'au XVI^e siècle, seuls les nombres réels étaient en lice. Mais à la Renaissance, des mathématiciens ambitieux ont tenté de résoudre des équations de plus en plus compliquées, allant même jusqu'à organiser des compétitions pour résoudre les problèmes les plus coriaces. Gerolamo Cardano (ou Jérôme Cardan), un mathématicien, médecin, joueur et astrologue italien, introduisit une sorte d'arme secrète : la racine carrée de -1 . Là où d'autres auraient ergoté, il a osé utiliser ce nombre mystérieux dans le cadre de calculs plus longs dont les résultats étaient des nombres réels ordinaires.

Cardan ne savait pas exactement pourquoi cette astuce fonctionnait, mais elle lui donnait les bonnes réponses. Il publia ses idées en 1545, enclenchant une longue controverse : la racine carrée de -1 existe-t-elle vraiment, ou ne s'agit-il que

d'une astuce de calcul ? Près de 100 ans plus tard, le Français René Descartes rendit son verdict en qualifiant d'«imaginaire» cette entité, que l'on nota i .

Néanmoins, les mathématiciens ont suivi les pas de Cardan et ont commencé à travailler avec les nombres «complexes», c'est-à-dire les nombres de la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels. Vers 1806, le Genevois Jean-Robert Argand répandit l'idée que les nombres complexes représentent des points sur un plan. L'idée est simple : dans $a + bi$, le nombre a indique la position horizontale du point correspondant, tandis que le nombre b spécifie sa position verticale.

On peut ainsi se représenter n'importe quel nombre complexe comme un point du plan, mais Argand est allé un peu plus loin : il a montré que les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication et division) sur les nombres complexes peuvent être interprétées comme des manipulations géométriques dans le plan (*voir l'encadré page 73*).

Presque tout ce que l'on peut faire avec les nombres réels peut être fait avec les nombres complexes. En réalité, la plupart des méthodes et raisonnements mathématiques fonctionnent mieux avec les

nombre complexes qu'avec les nombres réels. Cardan s'en était en partie rendu compte: on sait résoudre d'avantage d'équations avec les nombres complexes qu'avec les nombres réels.

Si un système bidimensionnel de nombres, les nombres complexes, offre une puissance accrue, qu'en est-il des systèmes de dimensionnalité supérieure? Malheureusement, une simple extension se révèle impossible. Un mathématicien irlandais allait découvrir le secret des systèmes de nombres à dimension supérieure des décennies plus tard. Et c'est seulement maintenant, deux siècles après, que nous commençons à saisir l'étendue de leur puissance.

Hamilton et son ami Graves s'en mêlent

En 1835, à l'âge de 30 ans, le mathématicien et physicien William Rowan Hamilton découvrit comment traiter les nombres complexes comme des couples de nombres réels. À l'époque, les mathématiciens écrivaient généralement les nombres

complexes sous la forme $a + bi$ introduite par Argand, mais Hamilton remarqua que rien ne nous empêche de considérer le nombre $a + bi$ comme une façon particulière de noter le couple (a, b) formé par les deux nombres réels a et b .

Cette notation permet d'additionner et de soustraire facilement des nombres complexes. Il suffit en effet d'additionner ou de soustraire les nombres occupant la même position dans les couples de nombres réels: ainsi, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Hamilton a également mis au point des règles légèrement plus compliquées pour multiplier et diviser les nombres complexes de façon à ce qu'ils conservent la belle signification géométrique découverte par Argand.

Après avoir inventé ce système algébrique pour les nombres complexes, Hamilton essaya durant de nombreuses années d'inventer une algèbre plus vaste, mettant en œuvre des triplets qui joueraient un rôle similaire en géométrie tridimensionnelle. Cette recherche fut pour lui très frustrante. Il écrivit un jour à son fils: «Tous les matins [...], lorsque je descendais pour le petit

L'ESSENTIEL

- ✓ L'ensemble des nombres réels est de dimension 1, celui des nombres complexes est de dimension 2.
- ✓ On peut aussi construire des systèmes de nombres de dimension supérieure. Mais on ne peut définir de façon cohérente une addition, une multiplication et une division qu'en dimensions 4 (quaternions) et 8 (octonions).
- ✓ Les octonions pourraient jouer un rôle clef dans la théorie des cordes et dans les symétries qu'elle fait intervenir.

1. CES DÉVELOPPEMENTS portant sur les octonions, nombres de dimension 8, conduiront-ils à une meilleure formulation et compréhension de la théorie des cordes? Les auteurs le pensent.