

nombre complexes qu'avec les nombres réels. Cardan s'en était en partie rendu compte: on sait résoudre d'avantage d'équations avec les nombres complexes qu'avec les nombres réels.

Si un système bidimensionnel de nombres, les nombres complexes, offre une puissance accrue, qu'en est-il des systèmes de dimensionnalité supérieure? Malheureusement, une simple extension se révèle impossible. Un mathématicien irlandais allait découvrir le secret des systèmes de nombres à dimension supérieure des décennies plus tard. Et c'est seulement maintenant, deux siècles après, que nous commençons à saisir l'étendue de leur puissance.

Hamilton et son ami Graves s'en mêlent

En 1835, à l'âge de 30 ans, le mathématicien et physicien William Rowan Hamilton découvrit comment traiter les nombres complexes comme des couples de nombres réels. À l'époque, les mathématiciens écrivaient généralement les nombres

complexes sous la forme $a + bi$ introduite par Argand, mais Hamilton remarqua que rien ne nous empêche de considérer le nombre $a + bi$ comme une façon particulière de noter le couple (a, b) formé par les deux nombres réels a et b .

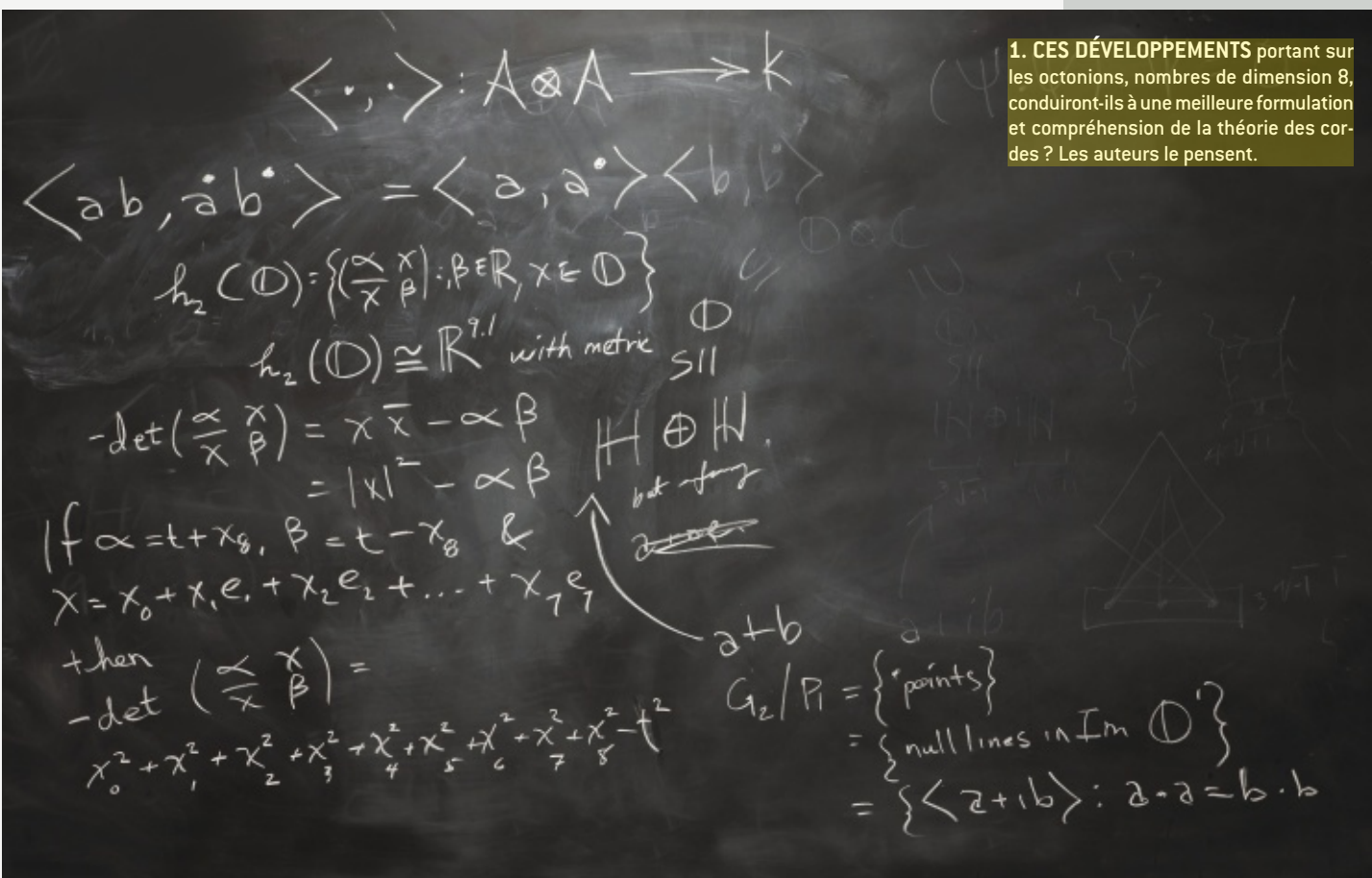
Cette notation permet d'additionner et de soustraire facilement des nombres complexes. Il suffit en effet d'additionner ou de soustraire les nombres occupant la même position dans les couples de nombres réels: ainsi, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Hamilton a également mis au point des règles légèrement plus compliquées pour multiplier et diviser les nombres complexes de façon à ce qu'ils conservent la belle signification géométrique découverte par Argand.

Après avoir inventé ce système algébrique pour les nombres complexes, Hamilton essaya durant de nombreuses années d'inventer une algèbre plus vaste, mettant en œuvre des triplets qui joueraient un rôle similaire en géométrie tridimensionnelle. Cette recherche fut pour lui très frustrante. Il écrivit un jour à son fils: «Tous les matins [...], lorsque je descendais pour le petit

L'ESSENTIEL

- ✓ L'ensemble des nombres réels est de dimension 1, celui des nombres complexes est de dimension 2.
- ✓ On peut aussi construire des systèmes de nombres de dimension supérieure. Mais on ne peut définir de façon cohérente une addition, une multiplication et une division qu'en dimensions 4 (quaternions) et 8 (octonions).
- ✓ Les octonions pourraient jouer un rôle clef dans la théorie des cordes et dans les symétries qu'elle fait intervenir.

1. CES DÉVELOPPEMENTS portant sur les octonions, nombres de dimension 8, conduiront-ils à une meilleure formulation et compréhension de la théorie des cordes? Les auteurs le pensent.



LES AUTEURS



Physicien-mathématicien de l'Université de Californie à Riverside, John BAEZ est actuellement au Centre des technologies quantiques de Singapour. John HUERTA vient d'achever sa thèse de doctorat en mathématiques à l'Université de Californie à Riverside.

BIBLIOGRAPHIE

J. G. Huerta, *Division Algebras, Supersymmetry and Higher Gauge Theory*, thèse de doctorat, Université de Californie à Riverside, juin 2011 (<http://math.ucr.edu/home/baez/huerta.pdf>).

P. Girard, *Quaternions, algèbre de Clifford et physique relativiste*, Presses Polytechniques Romandes, 2004.

J. C. Baez, *The octonions*, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 39, pp. 145-205, 2002 (<http://math.ucr.edu/home/baez/octonions>).

J. Conway et D. Smith, *On Quaternions and Octonions*, A K Peters, 2001.

S. Okubo, *Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics*, Cambridge University Press, 1995.

déjeuner, ton petit frère William Edwin et toi me demandiez : 'Alors, Papa, est-ce que tu arrives à multiplier les triplets ?' À quoi j'étais toujours obligé de répondre en secouant tristement la tête : 'Non, je peux seulement les additionner et les soustraire'. » Hamilton ne pouvait pas le savoir à l'époque, mais la tâche qu'il s'était fixée était mathématiquement impossible.

Quaternions de dimension quatre

Hamilton recherchait un système tridimensionnel de nombres où l'on peut ajouter, soustraire, multiplier et diviser. La division est la partie difficile : un système de nombres où l'on peut diviser (c'est-à-dire où tout élément non nul a un inverse pour la multiplication) est ce qu'on appelle une algèbre de division. Ce n'est qu'en 1958 que trois mathématiciens ont prouvé un fait remarquable soupçonné depuis des décennies : toute algèbre de division doit être de dimension 1 (l'algèbre des nombres réels), 2 (les nombres complexes), 4 ou 8. Pour parvenir à ses fins, Hamilton devait changer les règles du jeu.

Hamilton lui-même avait trouvé une solution le 16 octobre 1843. Il marchait à Dublin avec sa femme le long du Royal Canal, en route vers une réunion de l'Académie royale irlandaise, quand il eut une révélation soudaine. En dimension 3, on ne pouvait pas décrire les rotations et les dilatations à l'aide de trois nombres seulement. Il fallait un quatrième nombre, ce qui donnait lieu à un ensemble quadridimensionnel de nombres nommés quaternions et écrits sous la forme $a + bi + cj + dk$. Ici, les « nombres » i , j et k sont trois différentes racines carrées de -1 (c'est-à-dire vérifiant $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, voir l'encadré page 74).

Hamilton écrivit plus tard : « J'ai sur-le-champ senti se fermer le circuit galvanique de la pensée ; et les étincelles qui s'en sont échappées étaient les équations fondamentales entre i , j et k , exactement telles que je les ai utilisées depuis. » Et, remarquable geste de vandalisme mathématique, il grava ces équations dans la pierre du pont Brougham. Ces inscriptions ont maintenant disparu sous les graffitis, mais une plaque a été apposée pour commémorer la découverte.

Il peut sembler étrange que nous ayons besoin de points d'un espace quadridimensionnel pour décrire des changements

dans l'espace tridimensionnel, mais tel est bien le cas. Trois nombres servent à caractériser une rotation dans l'espace, ce que l'on peut aisément comprendre si l'on s'imaginer en train de piloter un avion. Pour orienter l'appareil, on peut modifier son assiette (l'angle que fait son axe longitudinal avec l'horizontale), modifier sa direction dans le plan horizontal (c'est-à-dire le faire tourner à droite ou à gauche) et, enfin, modifier l'angle des ailes de l'avion par rapport à l'horizontale. Le quatrième nombre dont on a besoin sert à décrire la dilatation (l'étirement ou le rétrécissement).

Hamilton passa le reste de sa vie obsédé par les quaternions, et il leur trouva de nombreuses utilisations. Aujourd'hui, dans beaucoup de ces applications, les quaternions ont été remplacés par des cousins plus simples : les vecteurs, que l'on peut considérer comme des quaternions particuliers, de la forme $bi + cj + dk$ (le premier nombre a vaut simplement zéro). Les quaternions conservent cependant leur niche : ils sont efficaces pour représenter les rotations tridimensionnelles sur ordinateur et interviennent à chaque fois que cela est nécessaire, des systèmes de contrôle d'attitude d'un vaisseau spatial au moteur de rendu d'un jeu vidéo.

Malgré ces applications, nous pourrions nous demander ce que sont exactement j et k étant donné que nous avons déjà défini i comme étant la racine carrée de -1 . Est-ce que ces racines carrées de -1 existent vraiment ? Pouvons-nous continuer à inventer autant de racines carrées de -1 qu'il nous plaît ?

Octonions de dimension huit

Ces questions ont été posées par un ami d'études de Hamilton, l'avocat John Graves, dont l'intérêt pour l'algèbre avait été à l'origine des réflexions de Hamilton sur les nombres complexes et les triplets. Le lendemain même de cette promenade décisive à l'automne 1843, Hamilton envoya à Graves une lettre décrivant sa percée. Graves répondit neuf jours plus tard et félicita Hamilton pour l'audace de son idée, mais il ajoutait : « Il y a quand même quelque chose dans le système qui me chagrine. Je ne saisis pas très bien dans quelle mesure nous sommes libres de créer arbitrairement des imaginaires et de les doter de propriétés surnaturelles. » Et il posait la question :