

LES AUTEURS



Physicien-mathématicien de l'Université de Californie à Riverside, John BAEZ est actuellement au Centre des technologies quantiques de Singapour. John HUERTA vient d'achever sa thèse de doctorat en mathématiques à l'Université de Californie à Riverside.

✓ BIBLIOGRAPHIE

J. G. Huerta, *Division Algebras, Supersymmetry and Higher Gauge Theory*, thèse de doctorat, Université de Californie à Riverside, juin 2011 [<http://math.ucr.edu/home/baez/huerta.pdf>].

P. Girard, *Quaternions, algèbre de Clifford et physique relativiste*, Presses Polytechniques Romandes, 2004.

J. C. Baez, *The octonions*, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 39, pp. 145-205, 2002 [<http://math.ucr.edu/home/baez/octonions>].

J. Conway et D. Smith, *On Quaternions and Octonions*, A K Peters, 2001.

S. Okubo, *Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics*, Cambridge University Press, 1995.

déjeuner, ton petit frère William Edwin et toi me demandiez : 'Alors, Papa, est-ce que tu arrives à multiplier les triplets ?' À quoi j'étais toujours obligé de répondre en secouant tristement la tête : 'Non, je peux seulement les additionner et les soustraire'. » Hamilton ne pouvait pas le savoir à l'époque, mais la tâche qu'il s'était fixée était mathématiquement impossible.

Quaternions de dimension quatre

Hamilton recherchait un système tridimensionnel de nombres où l'on peut ajouter, soustraire, multiplier et diviser. La division est la partie difficile : un système de nombres où l'on peut diviser (c'est-à-dire où tout élément non nul a un inverse pour la multiplication) est ce qu'on appelle une algèbre de division. Ce n'est qu'en 1958 que trois mathématiciens ont prouvé un fait remarquable soupçonné depuis des décennies : toute algèbre de division doit être de dimension 1 (l'algèbre des nombres réels), 2 (les nombres complexes), 4 ou 8. Pour parvenir à ses fins, Hamilton devait changer les règles du jeu.

Hamilton lui-même avait trouvé une solution le 16 octobre 1843. Il marchait à Dublin avec sa femme le long du Royal Canal, en route vers une réunion de l'Académie royale irlandaise, quand il eut une révélation soudaine. En dimension 3, on ne pouvait pas décrire les rotations et les dilatations à l'aide de trois nombres seulement. Il fallait un quatrième nombre, ce qui donnait lieu à un ensemble quadridimensionnel de nombres nommés quaternions et écrits sous la forme $a + bi + cj + dk$. Ici, les « nombres » i , j et k sont trois différentes racines carrées de -1 (c'est-à-dire vérifiant $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, voir l'encadré page 74).

Hamilton écrivit plus tard : « J'ai sur-le-champ senti se fermer le circuit galvanique de la pensée ; et les étincelles qui s'en sont échappées étaient les équations fondamentales entre i , j et k , exactement telles que je les ai utilisées depuis. » Et, remarquable geste de vandalisme mathématique, il grava ces équations dans la pierre du pont Brougham. Ces inscriptions ont maintenant disparu sous les graffitis, mais une plaque a été apposée pour commémorer la découverte.

Il peut sembler étrange que nous ayons besoin de points d'un espace quadridimensionnel pour décrire des changements

dans l'espace tridimensionnel, mais tel est bien le cas. Trois nombres servent à caractériser une rotation dans l'espace, ce que l'on peut aisément comprendre si l'on s' imagine en train de piloter un avion. Pour orienter l'appareil, on peut modifier son assiette (l'angle que fait son axe longitudinal avec l'horizontale), modifier sa direction dans le plan horizontal (c'est-à-dire le faire tourner à droite ou à gauche) et, enfin, modifier l'angle des ailes de l'avion par rapport à l'horizontale. Le quatrième nombre dont on a besoin sert à décrire la dilatation (l'étirement ou le rétrécissement).

Hamilton passa le reste de sa vie obsédé par les quaternions, et il leur trouva de nombreuses utilisations. Aujourd'hui, dans beaucoup de ces applications, les quaternions ont été remplacés par des cousins plus simples : les vecteurs, que l'on peut considérer comme des quaternions particuliers, de la forme $bi + cj + dk$ (le premier nombre a vaut simplement zéro). Les quaternions conservent cependant leur niche : ils sont efficaces pour représenter les rotations tridimensionnelles sur ordinateur et interviennent à chaque fois que cela est nécessaire, des systèmes de contrôle d'attitude d'un vaisseau spatial au moteur de rendu d'un jeu vidéo.

Malgré ces applications, nous pourrions nous demander ce que sont exactement j et k étant donné que nous avons déjà défini i comme étant la racine carrée de -1 . Est-ce que ces racines carrées de -1 existent vraiment ? Pouvons-nous continuer à inventer autant de racines carrées de -1 qu'il nous plaît ?

Octonions de dimension huit

Ces questions ont été posées par un ami d'études de Hamilton, l'avocat John Graves, dont l'intérêt pour l'algèbre avait été à l'origine des réflexions de Hamilton sur les nombres complexes et les triplets. Le lendemain même de cette promenade décisive à l'automne 1843, Hamilton envoya à Graves une lettre décrivant sa percée. Graves répondit neuf jours plus tard et félicita Hamilton pour l'audace de son idée, mais il ajoutait : « Il y a quand même quelque chose dans le système qui me chagrine. Je ne saisis pas très bien dans quelle mesure nous sommes libres de créer arbitrairement des imaginaires et de les doter de propriétés surnaturelles. » Et il posait la question :

«Si avec ton alchimie tu peux faire trois livres d'or, pourquoi devrais-tu en rester là?»

Comme Cardan avant lui, Graves mit ses interrogations de côté suffisamment longtemps pour produire lui-même un peu d'or. Le 26 décembre, il écrivit de nouveau à Hamilton pour lui décrire un système de nombres à huit dimensions qu'il nommait octaves, et que l'on appelle maintenant les octonions. Mais Graves ne parvint pas à éveiller l'intérêt de Hamilton. Ce dernier promit de parler des octaves de Graves à la Société royale irlandaise, ce qui était à l'époque l'une des façons de rendre publics des résultats mathématiques. Mais Hamilton remettait sans cesse à plus tard sa communication, et en 1845 le jeune génie Arthur Cayley redécouvrit les octonions et coiffa Graves au poteau de la publication. C'est pourquoi les octonions portent parfois le nom de nombres de Cayley.

Une algèbre non associative

Pourquoi Hamilton n'aimait-il pas les octonions ? D'une part, il était obsédé par ses recherches sur sa propre découverte, les quaternions. D'autre part, il avait une raison purement mathématique : les octonions enfreignent certaines lois chères à l'arithmétique.

Les quaternions sont eux-mêmes déjà un peu étranges. Quand on multiplie des nombres réels, peu importe l'ordre dans lequel on le fait : 2×3 est égal à 3×2 , par exemple. La multiplication est «commutative». Il en va de même avec les nombres complexes. Mais ce n'est pas le cas de la multiplication des quaternions.

Les quaternions décrivent des rotations en trois dimensions, et l'on sait que le résultat de plusieurs rotations successives dépend de l'ordre dans lequel elles ont été effectuées. Chacun peut le vérifier (voir l'encadré page 75). Prenez un livre, retournez-le autour de son axe vertical (vous lisez maintenant la quatrième de couverture), et faites-lui faire un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre. Maintenant, effectuez ces deux opérations dans l'ordre inverse : faites d'abord un quart de tour, puis retournez. La position finale est alors l'image inversée de celle de la première procédure. Puisque le résultat dépend de l'ordre, la composition des rotations n'est pas commutative. De même, la multiplication des quaternions ne l'est pas.

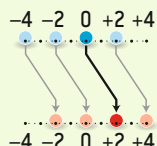
NOMBRES RÉELS ET NOMBRES COMPLEXES

À l'école, on apprend à relier les notions d'addition et de soustraction à des opérations concrètes : déplacer des nombres le long de la droite numérique. Ce lien entre l'algèbre et la géométrie se révèle très puissant. Grâce à lui, les mathématiciens peuvent utiliser l'algèbre des octonions pour résoudre des problèmes dans des mondes de dimension 8 difficiles à imaginer. Les tableaux ci-dessous montrent comment les opérations arithmétiques ou géométriques sur les nombres réels s'étendent aux nombres complexes, entités à deux dimensions.

NOMBRES RÉELS ($\mathbb{R}$)

Addition

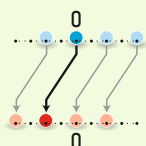
$$0 + 2 = 2$$



L'addition le long de la droite des réels est simple : on décale simplement chaque nombre vers la droite de la quantité à ajouter.

Soustraction

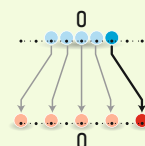
$$0 - 2 = -2$$



La soustraction fonctionne de la même façon, mais ici on déplace les nombres vers la gauche.

Multiplication

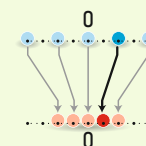
$$2 \times 2 = 4$$



Dans la multiplication par un nombre a , on étire la droite des nombres d'un facteur a .

Division

$$2 \div 2 = 1$$

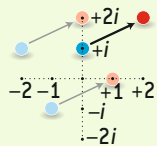


La division équivaut à resserrer les points sur la droite des nombres.

NOMBRES COMPLEXES ($\mathbb{C}$)

Addition

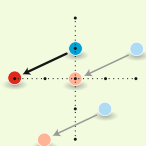
$$i + (2 + i) = 2 + 2i$$



Les nombres complexes ont deux composantes : la partie réelle, mesurée sur l'axe horizontal, et la partie imaginaire (que multiplie i), mesurée sur l'axe vertical. Pour ajouter deux nombres complexes a et b , on décale a vers la droite d'une quantité correspondant à la partie réelle de b , et vers le haut d'une quantité correspondant à la partie imaginaire de b .

Soustraction

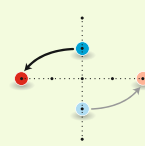
$$i - (2 + i) = -2 + 0i$$



De la même façon, quand on effectue la soustraction $a - b$ de deux nombres complexes, on décale a vers la gauche de la valeur de la partie réelle de b , et vers le bas de la valeur de la partie imaginaire de b .

Multiplication

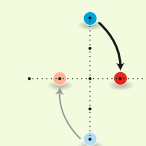
$$i \times (2i) = -2$$



Comme avec les nombres réels, la multiplication d'un nombre complexe a par un nombre réel étire le nombre a . Par ailleurs, la multiplication de a par i fait tourner a de 90 degrés dans le sens antihoraire.

Division

$$2i \div (2i) = 1$$



La division d'un nombre complexe a par un nombre réel k contracte le nombre a d'un facteur k , comme avec les nombres réels. La division de a par i fait tourner le nombre a de 90 degrés dans le sens horaire.