

«Si avec ton alchimie tu peux faire trois livres d'or, pourquoi devrais-tu en rester là?»

Comme Cardan avant lui, Graves mit ses interrogations de côté suffisamment longtemps pour produire lui-même un peu d'or. Le 26 décembre, il écrivit de nouveau à Hamilton pour lui décrire un système de nombres à huit dimensions qu'il nommait octaves, et que l'on appelle maintenant les octonions. Mais Graves ne parvint pas à éveiller l'intérêt de Hamilton. Ce dernier promit de parler des octaves de Graves à la Société royale irlandaise, ce qui était à l'époque l'une des façons de rendre publics des résultats mathématiques. Mais Hamilton remettait sans cesse à plus tard sa communication, et en 1845 le jeune génie Arthur Cayley redécouvrit les octonions et coiffa Graves au poteau de la publication. C'est pourquoi les octonions portent parfois le nom de nombres de Cayley.

Une algèbre non associative

Pourquoi Hamilton n'aimait-il pas les octonions ? D'une part, il était obsédé par ses recherches sur sa propre découverte, les quaternions. D'autre part, il avait une raison purement mathématique : les octonions enfreignent certaines lois chères à l'arithmétique.

Les quaternions sont eux-mêmes déjà un peu étranges. Quand on multiplie des nombres réels, peu importe l'ordre dans lequel on le fait : 2×3 est égal à 3×2 , par exemple. La multiplication est «commutative». Il en va de même avec les nombres complexes. Mais ce n'est pas le cas de la multiplication des quaternions.

Les quaternions décrivent des rotations en trois dimensions, et l'on sait que le résultat de plusieurs rotations successives dépend de l'ordre dans lequel elles ont été effectuées. Chacun peut le vérifier (voir l'encadré page 75). Prenez un livre, retournez-le autour de son axe vertical (vous lisez maintenant la quatrième de couverture), et faites-lui faire un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre. Maintenant, effectuez ces deux opérations dans l'ordre inverse : faites d'abord un quart de tour, puis retournez. La position finale est alors l'image inversée de celle de la première procédure. Puisque le résultat dépend de l'ordre, la composition des rotations n'est pas commutative. De même, la multiplication des quaternions ne l'est pas.

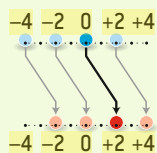
NOMBRES RÉELS ET NOMBRES COMPLEXES

À l'école, on apprend à relier les notions d'addition et de soustraction à des opérations concrètes : déplacer des nombres le long de la droite numérique. Ce lien entre l'algèbre et la géométrie se révèle très puissant. Grâce à lui, les mathématiciens peuvent utiliser l'algèbre des octonions pour résoudre des problèmes dans des mondes de dimension 8 difficiles à imaginer. Les tableaux ci-dessous montrent comment les opérations arithmétiques ou géométriques sur les nombres réels s'étendent aux nombres complexes, entités à deux dimensions.

NOMBRES RÉELS ($\mathbb{R}$)

Addition

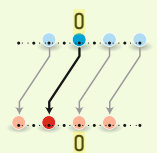
$$0 + 2 = 2$$



L'addition le long de la droite des réels est simple : on décale simplement chaque nombre vers la droite de la quantité à ajouter.

Soustraction

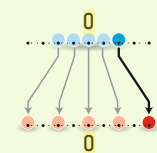
$$0 - 2 = -2$$



La soustraction fonctionne de la même façon, mais ici on déplace les nombres vers la gauche.

Multiplication

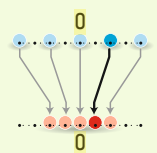
$$2 \times 2 = 4$$



Dans la multiplication par un nombre a , on étire la droite des nombres d'un facteur a .

Division

$$2 \div 2 = 1$$

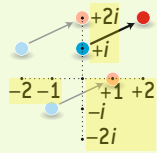


La division équivaut à resserrer les points sur la droite des nombres.

NOMBRES COMPLEXES ($\mathbb{C}$)

Addition

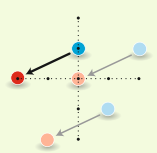
$$i + (2 + i) = 2 + 2i$$



Les nombres complexes ont deux composantes : la partie réelle, mesurée sur l'axe horizontal, et la partie imaginaire (que multiplie i), mesurée sur l'axe vertical. Pour ajouter deux nombres complexes a et b , on décale a vers la droite d'une quantité correspondant à la partie réelle de b , et vers le haut d'une quantité correspondant à la partie imaginaire de b .

Soustraction

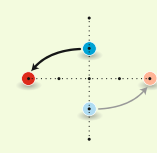
$$i - (2 + i) = -2 + 0i$$



De la même façon, quand on effectue la soustraction $a - b$ de deux nombres complexes, on décale a vers la gauche de la valeur de la partie réelle de b , et vers le bas de la valeur de la partie imaginaire de b .

Multiplication

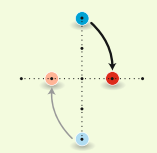
$$i \times (2i) = -2$$



Comme avec les nombres réels, la multiplication d'un nombre complexe a par un nombre réel étire le nombre a . Par ailleurs, la multiplication de a par i fait tourner a de 90 degrés dans le sens antihoraire.

Division

$$2i \div (2i) = 1$$



La division d'un nombre complexe a par un nombre réel k contracte le nombre a d'un facteur k , comme avec les nombres réels. La division de a par i fait tourner le nombre a de 90 degrés dans le sens horaire.