

Les octonions sont bien plus étranges encore. Non seulement leur multiplication n'est pas commutative, mais ils contreviennent à une autre loi familière de l'arithmétique: l'associativité, c'est-à-dire l'égalité $(xy)z = x(yz)$ pour tous x, y et z (la soustraction n'est pas associative, mais elle peut être vue comme une addition de nombres négatifs, et l'addition est associative). Mais nous avons l'habitude que la multiplication soit associative et la plupart des mathématiciens ont toujours cette attente, même s'ils se sont accoutumés aux opérations non commutatives. Ainsi, la composition des rotations est associative, même si elle n'est pas commutative.

Pour quel usage ?

Le point le plus important était peut-être qu'il n'était pas clair à l'époque de Hamilton que les octonions puissent servir à quelque chose. Ils sont étroitement liés à la géométrie en dimensions 7 et 8, et on peut décrire les rotations dans ces espaces multidimensionnels à l'aide de multiplications d'octonions. Mais pendant plus d'un siècle, cela est resté un exercice purement intellectuel. Il a fallu attendre le développement de la physique des par-

ticules (et la théorie des cordes en particulier) pour voir à quoi pourraient servir les octonions dans le monde réel.

Dans les années 1970 et 1980, les physiciens théoriciens ont développé une jolie idée: la supersymétrie (dont on apprend par la suite qu'elle est nécessaire à la théorie des cordes). Selon cette idée, l'Univers présente aux niveaux les plus fondamentaux une symétrie entre la matière élémentaire et les interactions fondamentales. La matière est décrite par des particules (tels l'électron ou le proton) nommées fermions, tandis que les forces fondamentales sont décrites par des particules (tel le photon, vecteur de l'interaction électromagnétique) nommées bosons. La supersymétrie stipule qu'à chaque particule de matière (un fermion) est associé un boson, et qu'à chaque particule de force est associé un fermion.

La supersymétrie contient également l'idée que les lois de la physique resteraient les mêmes si nous échangeons toutes les particules de force et de matière. Imaginez que vous regardiez le monde à travers un miroir qui, au lieu d'échanger la droite et la gauche, remplaçait chaque particule de force par une particule de matière, et inversement. Si la supersymétrie décrit vraiment notre Univers, cet univers miroir

se comporterait comme le nôtre. Bien que les chercheurs n'en aient pas encore trouvé de preuve expérimentale, la supersymétrie est une idée tellement séduisante et qui a conduit à des mathématiques tellement intéressantes que de nombreux physiciens espèrent et croient qu'elle est vraie.

Nombres unificateurs

Il y a cependant une théorie qui est bien vérifiée: la mécanique quantique. Et d'après la mécanique quantique, les particules sont aussi des ondes. Dans la version standard à trois dimensions de la mécanique quantique que les physiciens utilisent tous les jours, un type de nombres (les spineurs) entre dans la description du comportement ondulatoire des particules de matière. Un autre type de nombres (les vecteurs) permet de décrire le comportement ondulatoire des particules de force. Pour comprendre les interactions entre particules, nous devons combiner les deux types de nombres à l'aide d'une multiplication bricolée de toutes pièces. Même si le système que nous utilisons actuellement semble fonctionner, il est inélégant.

Comme alternative, imaginez un univers étrange dépourvu de temps, où seul

Quaternions et octonions

LES QUATERNIONS ($\mathbb{H}$)

L'ensemble des quaternions, noté $\mathbb{H}$ en l'honneur de Hamilton, leur inventeur-découvreur, est l'ensemble de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme $a + bi + cj + dk$, où a, b, c et d sont des nombres réels. Par définition, les symboles i, j et k vérifient les égalités suivantes :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 ; \\ ij = -ji = k ; jk = -kj = i ; ki = -ik = j.$$

Cela peut être résumé par la table de multiplication ci-dessous.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	i	-i	-1

La multiplication de deux quaternions x et y n'est donc pas, en général, commutative: xy n'est pas égal à yx pour tous x et y .

L'addition de deux quaternions est définie de façon naturelle :

$$\text{si } x = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k \text{ et } \\ y = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k, \text{ alors:}$$

$$x + y = y + x = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

L'ensemble des quaternions peut être muni d'une norme (une sorte de longueur attribuée à chaque nombre). Le carré de la norme de $x = a + bi + cj + dk$ est ainsi le nombre positif ou nul $xx^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, où $x^* = a - bi - cj - dk$ est le « conjugué » de x .

Les rotations dans l'espace peuvent être représentées de façon efficace à l'aide de quaternions. Plus précisément, considérons la rotation d'angle 2α (dans le sens direct, et compris entre 0 et 2π radians) autour de l'axe dont le vecteur unité a pour composantes (u_x, u_y, u_z) . À tout vec-

teur de composantes x, y et z , on associe le quaternion $V = xi + yj + zk$. Appliquée au vecteur (ou quaternion) V , la rotation considérée conduit au quaternion (vecteur) V' donné par le produit : $V' = q_\alpha V q_\alpha^*$, où $q_\alpha = \cos \alpha + \sin \alpha (u_x i + u_y j + u_z k)$.

LES OCTONIONS ($\mathbb{O}$)

L'ensemble des octonions, noté $\mathbb{O}$, est celui de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme :

$$x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 + x_5 i_5 + x_6 i_6 + x_7 i_7,$$

où $x_0, x_1, \dots, x_7$ sont des nombres réels et où les symboles $i_1, i_2, \dots, i_7$ vérifient la table de multiplication ci-dessous.

	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
1	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	i_1	-1	i_3	$-i_2$	i_4	$-i_7$	i_6	$-i_5$
i_2	i_2	$-i_3$	-1	i_1	$-i_6$	i_7	i_4	$-i_5$
i_3	i_3	i_2	$-i_1$	-1	$-i_7$	$-i_6$	i_5	i_4
i_4	i_4	i_5	i_6	i_7	-1	$-i_1$	$-i_2$	$-i_3$
i_5	i_5	$-i_4$	$-i_7$	i_6	i_1	-1	$-i_3$	i_2
i_6	i_6	i_7	$-i_4$	$-i_5$	i_2	i_3	-1	$-i_1$
i_7	i_7	$-i_6$	i_5	$-i_4$	i_3	$-i_2$	i_1	-1

Par ailleurs, l'addition est définie comme pour les quaternions et a les propriétés habituelles.

On peut voir que cette multiplication n'est pas associative. Par exemple, $(i_1 i_4) i_6 = i_3$, alors que $i_1 (i_4 i_6) = -i_3$. Elle n'est bien sûr pas commutative non plus, et l'on a: $i_p i_q = -i_q i_p$. La table de multiplication peut être entièrement caractérisée par les égalités :

$$i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = ijk = jki = \\ kij = -1, \text{ où l'on a noté } i, j, k \\ \text{ et } l \text{ au lieu de } i_1, i_2, i_3 \text{ et } i_4.$$