

La percolation, un jeu de pavages aléatoires

Hugo Duminil-Copin

Dans les modèles de percolation, un réseau aléatoire est traversé d'un bout à l'autre. Ces modèles sont en lien étroit avec l'étude de la symétrie conforme, un champ très actif des mathématiques et de la physique théorique.

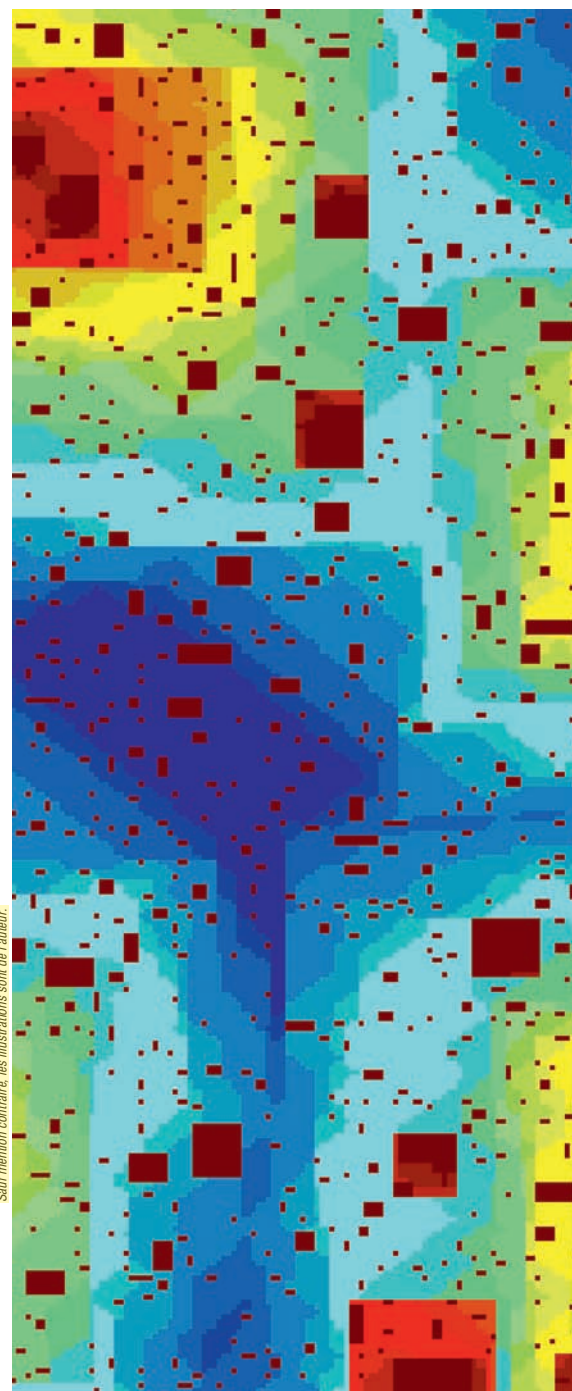
Maxime fait face à sa cuisine, songeur. Sa famille l'a chargé d'une mission de la plus haute importance : carreler la pièce avec des dalles hexagonales. Comme si cela ne suffisait pas, ses enfants se sont disputés pour le choix des couleurs, jaune ou bleu (les enfants ont parfois des goûts surprenants). Comme Maxime n'aime pas les conflits, il a décidé de choisir la couleur des dalles aléatoirement et équitablement. Chaque fois qu'il posera une dalle, il choisira sa couleur en tirant à pile ou face.

Il lance une pièce de monnaie : pile ! Le premier carreau est jaune. Il le pose dans le coin le plus éloigné de la porte. Il relance sa pièce : face ! Le carreau adjacent au précédent est bleu. Très rapidement, Maxime s'interroge sur le résultat final, non pas sur la beauté de sa future cuisine, mais plutôt sur son aspect ludique (voir la figure 2). Par exemple, lui sera-t-il possible de traverser la pièce en ne marchant que sur des hexagones bleus contigus ? Ou, s'il préfère marcher sur les lignes séparant les hexagones bleus des hexagones jaunes, combien de pas lui faudra-t-il, en partant de la porte, pour atteindre le mur opposé ?

Sous leur apparence ludique, les questions de Maxime intéressent mathématiciens et physiciens depuis plus d'un siècle. Le coloriage aléatoire d'un réseau – ici les hexagones forment un réseau en nid d'abeilles – est un modèle dit de percolation (du latin *percolare*, couler à travers). L'origine étymologique de ce modèle est la percolation d'un liquide à travers une matière poreuse, par exemple l'eau à travers du café moulu.

La véritable étude scientifique des modèles de percolation a débuté avec les travaux de l'ingénieur Simon Broadbent et du mathématicien John Hammersley,

1. LA THÉORIE DE LA PERCOLATION s'applique à l'étude de phénomènes tels que la propagation d'un feu de forêt. Dans le modèle illustré ici, dit de percolation « bootstrap », chaque case élémentaire représente un arbre. À partir d'une configuration initiale où certains arbres, pris au hasard, sont en feu, la forêt évolue selon une règle simple : un arbre intact à l'instant t prend feu à l'instant $t + 1$ si deux au moins de ses voisins immédiats sont en feu (ici, les arbres ayant brûlé en premier sont en rouge, ceux ayant brûlé en dernier sont en bleu). On peut alors s'intéresser par exemple à la probabilité que l'incendie finisse par brûler tous les arbres.



Sauf mention contraire, les illustrations sont de l'auteur.

en Angleterre. Ils ont introduit en 1957 un tel modèle afin de comprendre comment les poussières pouvaient obstruer les masques à gaz. Depuis, la percolation n'a cessé de susciter l'intérêt des scientifiques, notamment parce qu'on la rencontre sous une forme ou une autre dans de nombreux phénomènes : écoulement d'un fluide dans un matériau poreux, gélification d'un liquide, propagation d'un incendie ou d'une épidémie, passage du courant électrique dans un mélange de matériaux conducteurs et isolants, etc.

Prenons l'exemple des feux de cimes. Ces incendies de forêts sont caractérisés par le fait que le feu se propage d'un arbre à l'autre si leurs feuillages se touchent. Si l'on modélise une forêt par un ensemble

d'hexagones, certains étant occupés par un arbre, d'autres non, l'étude de la propagation de l'incendie revient à étudier les amas d'arbres adjacents. Bien entendu, les feux de cimes ne sont pas les plus fréquents. En général, le feu se propage surtout par les racines et non par le feuillage. Un modèle de percolation n'est donc qu'une caricature de phénomènes complexes.

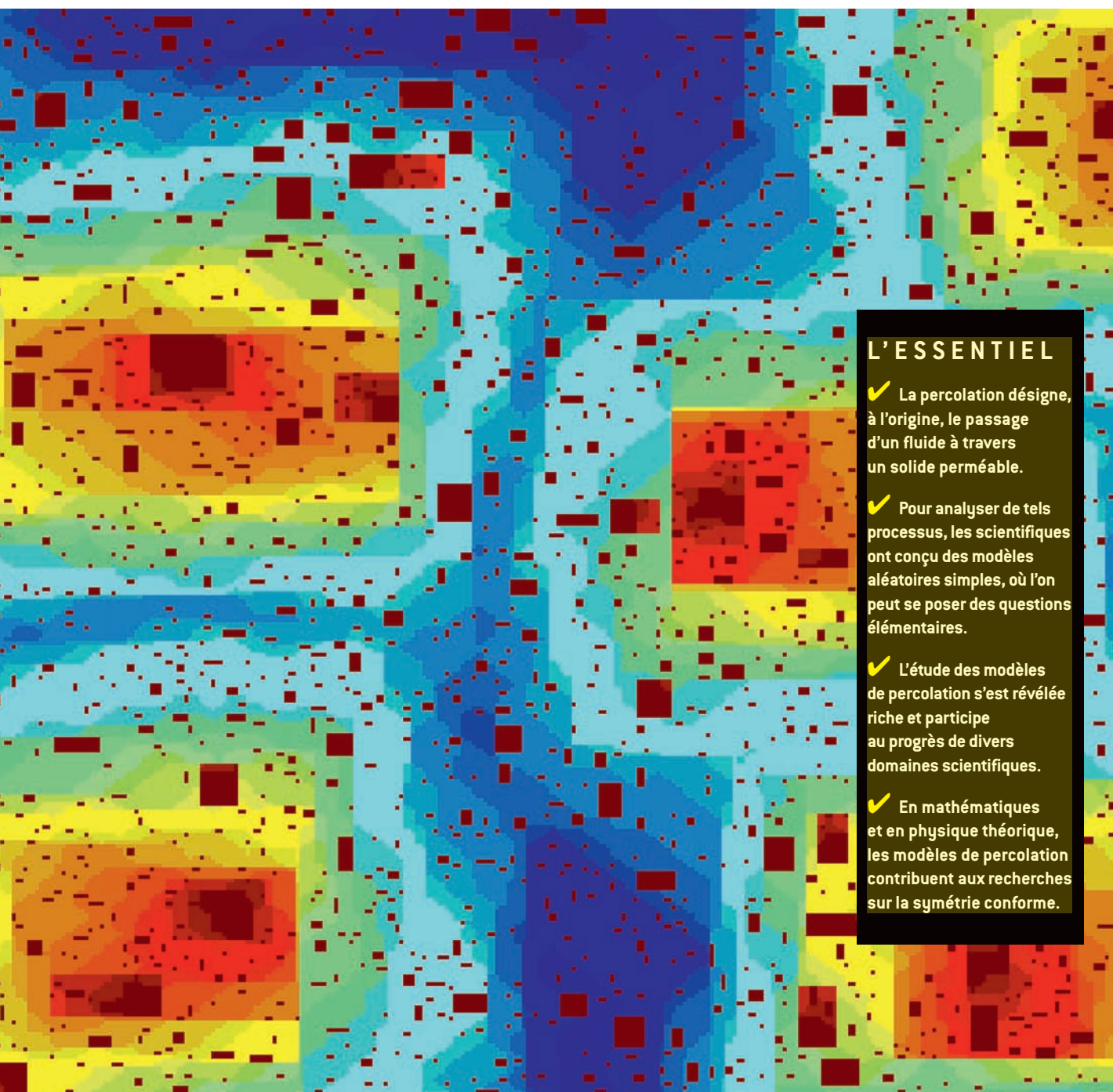
Un modèle simple, mais riche

Cependant, la simplification permet de dégager certaines propriétés intrinsèques, indépendantes des détails spécifiques du phénomène considéré. Ainsi, il y a quelques années, Bernard Sapoval, à l'École

L'AUTEUR



Hugo DUMINIL-COPIN est doctorant en mathématiques à l'Université de Genève, sous la direction de Stanislas Smirnov.



L'ESSENTIEL

- ✓ La percolation désigne, à l'origine, le passage d'un fluide à travers un solide perméable.
- ✓ Pour analyser de tels processus, les scientifiques ont conçu des modèles aléatoires simples, où l'on peut se poser des questions élémentaires.
- ✓ L'étude des modèles de percolation s'est révélée riche et participe au progrès de divers domaines scientifiques.
- ✓ En mathématiques et en physique théorique, les modèles de percolation contribuent aux recherches sur la symétrie conforme.